

ناطق اعداد

تدریسی مقاصد

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبا و طالبات اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- ناطق عدد کی ایسے عدد کے طور پر تعریف کریں جو علامتی طور پر $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکے جب کہ p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ہو۔
- ناطق اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کریں۔
- دو یا دو سے زیادہ ناطق اعداد کو جمع کریں۔
- ایک ناطق عدد کو دوسرے میں سے تفریق کریں۔
- کسی بھی ناطق عدد کا جمعی معکوس معلوم کریں۔
- دو یا دو سے زیادہ ناطق اعداد کو ضرب دیں۔
- کسی بھی ناطق عدد کو کسی دوسرے غیر صفر ناطق عدد پر تقسیم کریں۔
- کسی بھی غیر صفر ناطق عدد کا ضربی معکوس معلوم کریں۔
- کسی بھی غیر صفر ناطق عدد کا معکوس معلوم کریں۔
- ناطق اعداد کی خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع اور ضرب کی پڑتال کریں۔
- ناطق اعداد کی خاصیت تلازم بلحاظ جمع اور ضرب کی پڑتال کریں۔
- ناطق اعداد کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع/تفریق کی پڑتال کریں۔
- دو ناطق اعداد کا باہم موازنہ کریں۔
- ناطق اعداد کو صعودی اور نزولی ترتیب میں لکھیں۔

2.1 ناطق اعداد

ہم پچھلی جماعت میں یہ سیکھ چکے ہیں کہ قدرتی اعداد کا حاصل تفریق ضروری نہیں کہ قدرتی عدد ہی حاصل ہو۔
مثال کے طور پر

$$2 - 4 = -2 \dots\dots\dots (i)$$

$$1 - 5 = -4 \dots\dots\dots (ii)$$

(i) اور (ii) پر غور کرنے سے ہمیں یہ علم ہوتا ہے کہ -2 اور -4 قدرتی اعداد نہیں ہیں۔ اس مسئلے سے ہمیں صحیح اعداد کا تصور حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح دو صحیح اعداد کو باہم ضرب دینے سے حاصل ضرب صحیح عدد حاصل ہوتا ہے۔ مثلاً

$$-1 \times 2 = -2 \dots\dots\dots (iii)$$

$$-2 \times (-3) = 6 \dots\dots\dots (iv)$$

مندرجہ بالا (iii) اور (iv) میں ہم غور کر سکتے ہیں کہ -2 اور 6 بھی صحیح اعداد ہیں۔ مگر صحیح اعداد کی تقسیم سے ہمیں یہ نتیجہ ہر بار حاصل نہیں ہوتا یعنی $\frac{3}{2}$ ، $\frac{4}{7}$ ، $-\frac{2}{5}$ ، $\frac{1}{6}$ صحیح اعداد نہیں ہیں۔ لہذا اس کا مطلب یہ ہوا کہ صحیح اعداد کی تقسیم ایک ایسے عددی نظام کی ضرورت ظاہر کرتی ہے جس میں صحیح اعداد کے علاوہ کسور بھی شامل ہوں جو کہ ناطق اعداد پوری کرتے ہیں۔

2.1.1 ناطق اعداد کی تعریف

ایسا عدد جس کو علامتی طور پر $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکے، جبکہ p اور q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ہو، ناطق عدد کہلاتا ہے۔
مثلاً $\frac{3}{2}$ ، $\frac{4}{7}$ ، $-\frac{2}{5}$ ، $\frac{1}{6}$ ناطق اعداد کی مثالیں ہیں۔

ناطق اعداد کا سیٹ ایسا سیٹ ہوتا ہے جس کے ارکان قدرتی اعداد، منفی اعداد، صفر اور تمام مثبت اور منفی کسور پر مشتمل ہوتے ہیں۔

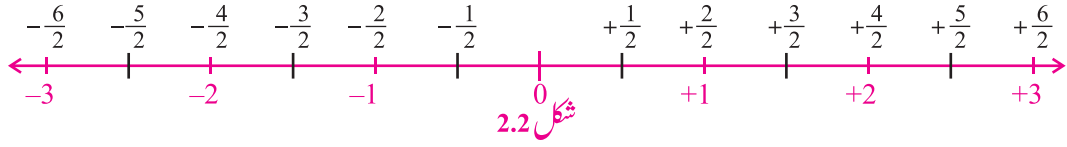
2.1.2 ناطق اعداد کا نمبر لائن پر اظہار

ہم پہلے ہی صحیح اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کرنے کا طریقہ جانتے ہیں۔ اب ہم اُسی نمبر لائن پر ناطق اعداد کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس مقصد کے لیے ہم ایک نمبر لائن کھینچتے ہیں۔



شکل 2.1

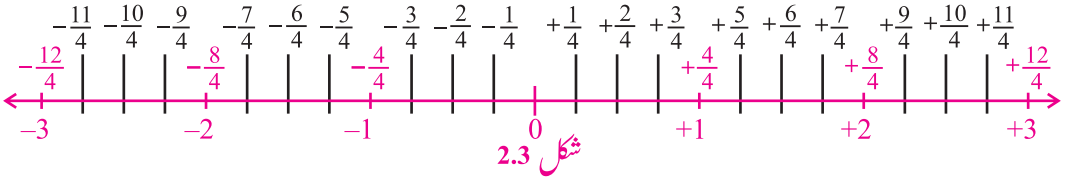
اب ہم دی گئی نمبر لائن کے ہر قطعے کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ جیسا کہ نیچے دی گئی شکل میں ظاہر ہے۔



شکل 2.2 میں دی گئی نمبر لائن سے درج ذیل ناطق اعداد ظاہر ہیں۔

$$\dots, -\frac{6}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +\frac{2}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{4}{2}, +\frac{5}{2}, +\frac{6}{2}, \dots$$

اب ہم اوپر دی گئی نمبر لائن کے ہر چھوٹے قطعے کو مزید دو حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔



شکل 2.3 میں دی گئی نمبر لائن سے درج ذیل ناطق اعداد ظاہر ہیں۔

$$\dots, \frac{12}{4}, \frac{11}{4}, \frac{10}{4}, \frac{9}{4}, \frac{8}{4}, \frac{7}{4}, \frac{6}{4}, \frac{5}{4}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, +\frac{1}{4}, +\frac{2}{4}, +\frac{3}{4}, +\frac{4}{4}, +\frac{5}{4}, +\frac{6}{4}, +\frac{7}{4}, +\frac{8}{4}, +\frac{9}{4}, +\frac{10}{4}, +\frac{11}{4}, +\frac{12}{4}, \dots$$

اسی طرح ہم نمبر لائن کے ہر قطعے کو تین، پانچ بلکہ اس سے بھی زیادہ حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں اور مندرجہ بالا طریقے سے

نمبر لائن پر کوئی بھی ناطق عدد ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثال 1: نمبر لائن کھینچ کر اس پر ناطق عدد $-\frac{10}{3}$ کو ظاہر کیجیے۔

حل:

پہلا قدم: نمبر لائن کھینچیں جیسا کہ نیچے ظاہر ہے۔



دوسرا قدم: $-\frac{10}{3}$ کو مخلوط کسر $-3\frac{1}{3}$ میں تبدیل کریں۔

تیسرا قدم: نمبر لائن پر -4 اور -3 کے درمیانی قطعے کو تین برابر حصوں میں تقسیم کریں اور -3 سے آگے بڑھتے ہوئے

گنتی گنیں۔ پہلا حصہ $-3\frac{1}{3}$ ہے جو کہ ہمارا مطلوبہ عدد ہے۔



مشق 2.1

1- درست بیان کے لیے "T" اور غلط بیان کے لیے "F" لکھیے۔

(i) قدرتی اعداد ناطق اعداد ہوتے ہیں۔

(ii) "0" ناطق عدد نہیں ہے۔

(iii) ایک صحیح عدد کو علامتی طور پر $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے، جبکہ $q \neq 0$

(iv) منفی اعداد ناطق اعداد نہیں ہوتے۔

(v) کسی ناطق عدد $\frac{p}{q}$ کے لیے q صفر کے برابر ہو سکتا ہے۔

2- ہر ناطق عدد کو نمبر لائن پر ظاہر کیجیے۔

(i) $-\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $1\frac{4}{5}$ (iv) $-2\frac{3}{4}$

2.2 ناطق اعداد کے عوامل

آئیے اس حصے میں ہم ناطق اعداد کے عوامل جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے بارے میں جانتے ہیں۔

2.2.1 ناطق اعداد کی جمع

(a) اگر $\frac{p}{s}$ اور $\frac{q}{s}$ کوئی سے دو ہم مخرج ناطق اعداد ہوں تو ہم ان کو یوں جمع کرتے ہیں۔

$$\frac{p}{s} + \frac{q}{s} = \frac{p+q}{s}$$

مثال 1: درج ذیل ناطق اعداد کو مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ (ii) $-\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$ (iii) $\frac{11}{15} + \frac{8}{15} + \left(-\frac{14}{15}\right)$ (iv) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$

حل:

<p>(i) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$</p> <p>$= \frac{2+1}{3}$</p> <p>$= \frac{3}{3} = 1$</p>	<p>(ii) $-\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}$</p> <p>$= \frac{-1+2+4}{7}$</p> <p>$= \frac{5}{7}$</p>	<p>(iii) $\frac{11}{15} + \frac{8}{15} + \left(-\frac{14}{15}\right)$</p> <p>$= \frac{11+8-14}{15}$</p> <p>$= \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$</p>	<p>(iv) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$</p> <p>$= \frac{a+c}{b}$</p>
---	--	--	--

(b) اگر $\frac{P}{q}$ اور $\frac{r}{s}$ کوئی سے دو مختلف مخرج والے ناطق اعداد ہوں تو ہم اُن کو درج ذیل طریقہ سے جمع کر سکتے ہیں۔

$$\frac{P}{q} + \frac{r}{s} = \frac{Ps + rq}{qs}$$

مثال 2: درج ذیل ناطق اعداد کا مجموعہ لکھیے۔

(i) $-\frac{6}{5} + \frac{7}{12}$

(ii) $1\frac{1}{3} + \frac{5}{2} + \frac{1}{4}$

حل:

(i) $-\frac{6}{5} + \frac{7}{12}$
 $= \frac{-72 + 35}{60} = -\frac{37}{60}$

(ii) $1\frac{1}{3} + \frac{5}{2} + \frac{1}{4}$
 $= \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{1}{4}$
 $= \frac{16 + 30 + 3}{12} = \frac{49}{12} = 4\frac{1}{12}$

2.2.2 ناطق اعداد کی تفریق

(a) کوئی سے دو ہم مخرج ناطق اعداد کا فرق یوں معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\frac{P}{s} - \frac{q}{s} = \frac{P - q}{s}$$

مثال 3: درج ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$

(ii) $\frac{8}{9} - \frac{1}{9} - \left(\frac{-4}{9}\right)$

حل:

(i) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}$
 $= \frac{1 - 2}{5} = -\frac{1}{5}$

(ii) $\frac{8}{9} - \frac{1}{9} - \left(\frac{-4}{9}\right)$
 $= \frac{8}{9} - \frac{1}{9} + \frac{4}{9}$
 $= \frac{8 - 1 + 4}{9} = \frac{11}{9} = 1\frac{2}{9}$

(b) کوئی سے دو مختلف مخرج والے ناطق اعداد کا فرق یوں معلوم کرتے ہیں۔

$$\frac{P}{q} - \frac{r}{s} = \frac{Ps - rq}{qs}$$

مثال 4: مختصر کیجیے۔

$$(i) \quad \frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{9}\right)$$

$$(ii) \quad \frac{5}{2} - \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{8}\right)$$

حل:

$$(i) \quad \frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{9}\right) \\ = \frac{4}{3} + \frac{2}{9} \\ = \frac{12+2}{9} = \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$$

$$(ii) \quad \frac{5}{2} - \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{8}\right) \\ = \frac{5}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \\ = \frac{20-6+1}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

2.2.3 جمعی معکوس

فرض کریں $\frac{p}{q}$ اور $\frac{-p}{q}$ کوئی سے دو ناطق اعداد ہیں ان کو یوں جمع کرتے ہیں۔

$$\frac{p}{q} + \left(\frac{-p}{q}\right) = \left(\frac{-p}{q}\right) + \frac{p}{q} = 0$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں ناطق اعداد کا مجموعہ صفر ہے۔ ایسے میں ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ اور $\frac{-p}{q}$ ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں اور 0 جمعی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر $\frac{1}{2}$ اور $-\frac{1}{2}$ ، 3 اور -3، $\frac{-5}{11}$ اور $\frac{5}{11}$ وغیرہ سب ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

مثال 5: درج ذیل ناطق اعداد کے جمعی معکوس لکھیے۔

$$(i) \quad 3$$

$$(ii) \quad -\frac{1}{2}$$

$$(iii) \quad \frac{7}{4}$$

حل:

(i) 3 کا جمعی معکوس معلوم کرنے کے لیے اس کی علامت تبدیل کر دیں۔
3 کا جمعی معکوس -3 ہوتا ہے۔

$$3 + (-3) = 3 - 3 = 0$$

(ii) $\frac{-1}{2}$ کا جمعی معکوس معلوم کرنے کے لیے اس کی علامت تبدیل کر دیں۔

$\frac{-1}{2}$ کا جمعی معکوس $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے۔

$$\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

(iii) $\frac{7}{4}$ کا جمعی معکوس معلوم کرنے کے لیے اس کی علامت تبدیل کر دیں۔

$\frac{7}{4}$ کا جمعی معکوس $-\frac{7}{4}$ ہوتا ہے۔

$$\frac{7}{4} + \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4} - \frac{7}{4} = 0 \text{ پڑتال}$$

2.2.4 ناطق اعداد کی ضرب

ہم دیے گئے قانون کی مدد سے دو یا دو سے زیادہ ناطق اعداد کا حاصل ضرب معلوم کر سکتے ہیں۔

قانون: ایک ناطق عدد کے شمار کنندہ کو دوسرے کے شمار کنندہ سے ضرب دیں۔ اسی طرح دونوں ناطق اعداد کے مخرجوں کو بھی ضرب دیں۔ یعنی

$$\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$$

مثال 6: درج ذیل ناطق اعداد کا حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{2}{5} \times \frac{11}{12}$

(ii) $\frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right)$

حل:

(i) $\frac{2}{5} \times \frac{11}{12}$
 $= \frac{2 \times 11}{5 \times 12} = \frac{22}{60} = \frac{11}{30}$

(ii) $\frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right)$
 $= \frac{1 \times (-2) \times (-5)}{4 \times 3 \times 2} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

2.2.5 ضربی معکوس

دو غیر صفر ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ اور $\frac{q}{p}$ کا حاصل ضرب یوں معلوم کرتے ہیں۔

$$\frac{p}{q} \times \frac{q}{p} = \frac{pq}{pq} = 1$$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ان دونوں ناطق اعداد کا حاصل ضرب 1 ہے۔ اس لیے یہ دونوں ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ اور $\frac{q}{p}$ ایک دوسرے کے

ضربی معکوس اور 1 ضربی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر 2 اور $\frac{1}{2}$ ، -5 اور $-\frac{1}{5}$ ، $\frac{3}{7}$ اور $\frac{7}{3}$ وغیرہ سب ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

مثال 7: درج ذیل ناطق اعداد کے ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

(i) -4 (ii) $\frac{3}{5}$ (iii) $-\frac{11}{9}$

حل:

(i) -4

-4 کا ضربی معکوس معلوم کرنے کے لیے، شمار کنندہ کو مخرج اور مخرج کو شمار کنندہ بنا کر لکھیں۔

-4 کا ضربی معکوس $-\frac{1}{4}$ ہوتا ہے۔

پڑتال: $(-4) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 1$

(iii) $-\frac{11}{9}$

$-\frac{11}{9}$ کا ضربی معکوس $-\frac{9}{11}$ ہوتا ہے۔

پڑتال: $-\frac{11}{9} \times -\frac{9}{11} = \frac{99}{99} = 1$

(ii) $\frac{3}{5}$

$\frac{3}{5}$ کا ضربی معکوس $\frac{5}{3}$ ہوتا ہے۔

پڑتال: $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$

○ کسی بھی غیر صفر ناطق عدد کا معکوس اُس کا ضربی معکوس ہوتا ہے۔

○ 0 کا کوئی معکوس نہیں ہوتا۔

2.2.6 ناطق اعداد کی تقسیم

ہم جانتے ہیں کہ تقسیم ضرب کا متضاد عمل ہوتا ہے۔ لہذا ہم تقسیم کا عمل درج ذیل طریقے سے کر سکتے ہیں۔

پہلا قدم: مقسوم علیہ کا ضربی معکوس معلوم کریں۔

دوسرا قدم: ضرب کے قانون کے مطابق اس کو تقسیم کنندہ سے ضرب دے دیں۔

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}$$

مثال 7: مختصر کیجیے۔

$$(i) -\frac{8}{3} \div \frac{16}{3}$$

$$(ii) -\frac{4}{5} \div \left(-\frac{6}{25}\right)$$

$$(iii) \frac{3}{5} \div \left(-\frac{6}{5}\right)$$

حل:

$$(i) \quad -\frac{8}{3} \div \frac{16}{3}$$

$$= -\frac{8}{3} \times \frac{3}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$(iii) \quad \frac{3}{5} \div \left(-\frac{6}{5}\right)$$

$$= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$= \frac{3 \times (-5)}{5 \times 6} = \frac{-1}{2}$$

$$(ii) \quad -\frac{4}{5} \div \left(-\frac{6}{25}\right)$$

$$= -\frac{4}{5} \times \left(-\frac{25}{6}\right)$$

$$= \frac{(-4) \times (-25)}{5 \times 6}$$

$$= \frac{(-2) \times (-5)}{3}$$

$$= \frac{10}{3}$$

2.2.7 ناطق عدد کا معکوس معلوم کرنا

ایک غیر صفر ناطق عدد $\frac{3}{7}$ لیں جو دو صحیح اعداد 3 بطور شمار کنندہ اور 7 بطور مخرج پر مشتمل ہے۔ اگر ہم شمار کنندہ اور مخرج کو آپس میں تبدیل کر دیں تو ایک اور ناطق عدد $\frac{7}{3}$ حاصل ہوتا ہے۔ بالعموم غیر صفر ناطق عدد $\frac{p}{q}$ کے لیے ایک اور غیر صفر ناطق عدد $\frac{q}{p}$ ہوتا ہے جو اس کا معکوس ہوتا ہے۔ عدد $\frac{7}{3}$ کا معکوس $\frac{3}{7}$ ہے۔ اسی طرح $\frac{9}{-13}$ یا $\frac{-9}{13}$ کا معکوس $\frac{-13}{9}$ ہے اور $\frac{-105}{113}$ کا معکوس $\frac{113}{-105}$ یا $\frac{-113}{105}$ ہوتا ہے۔

یہاں یہ نتیجہ اخذ ہوتا ہے کہ اگر $\frac{q}{p}$ کا معکوس $\frac{p}{q}$ ہو تو $\frac{p}{q}$ بھی $\frac{q}{p}$ کا معکوس ہے۔ یا دوسرے لفظوں میں $\frac{q}{p}$ اور $\frac{p}{q}$ دونوں ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔ یہاں معکوس سے مراد ضربی معکوس ہے۔

مشق 2.2

1- درج ذیل ناطق اعداد کے جمعی اور ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

- | | | | |
|----------------------|---------------------|------------------------|-------------------------|
| (i) -7 | (ii) 23 | (iii) -11 | (iv) $\frac{1}{3}$ |
| (v) $-\frac{2}{7}$ | (vi) 6 | (vii) 1 | (viii) $-\frac{6}{13}$ |
| (ix) $\frac{1}{100}$ | (x) $\frac{18}{27}$ | (xi) $-\frac{99}{100}$ | (xii) $\frac{102}{117}$ |

2- درج ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{1}{8} - \left(-\frac{5}{8}\right)$

(ii) $-\frac{99}{100} + \frac{77}{100}$

(iii) $\frac{3}{4} + \frac{4}{3}$

(iv) $\frac{1}{5} - \frac{3}{20}$

(v) $1 + \left(-\frac{49}{50}\right)$

(vi) $1 + \frac{11}{100}$

(vii) $\frac{1}{11} + \left(-\frac{5}{11}\right) + \frac{10}{11}$

(viii) $\frac{13}{23} - \frac{10}{23} + \frac{4}{23}$

(ix) $\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{9}{10}$

(x) $\frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{15}{18}$

(xi) $-\frac{3}{4} - \frac{5}{6} - \left(-\frac{17}{8}\right)$

(xii) $\frac{1}{11} + \frac{11}{10} + \left(-\frac{22}{5}\right)$

3- مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$

(ii) $\frac{50}{51} \times \frac{7}{10}$

(iii) $\frac{121}{169} \div \frac{11}{13}$

(iv) $\frac{5}{7} \div \frac{35}{40}$

(v) $\left(-\frac{15}{28}\right) \times \frac{14}{30}$

(vi) $\frac{111}{100} \div \frac{222}{300}$

(vii) $\frac{3}{2} \div \frac{4}{9} \times \frac{16}{81}$

(viii) $\frac{8}{9} \div \frac{2}{3} \times \frac{15}{28}$

(ix) $\frac{8}{125} \div \frac{16}{75}$

(x) $\frac{1}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{100}{32}\right)$

(xi) $\frac{1}{1000} \div \left(-\frac{1}{100}\right)$

(xii) $-\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \div \left(-\frac{51}{40}\right)$

ناطق اعداد کے خواص

مکمل اعداد، کسور، صحیح اعداد وغیرہ کی طرح ناطق اعداد میں بھی خاصیت مبادلہ، خاصیت تلازم اور خاصیت تقسیمی کے قوانین پائے جاتے ہیں۔ آئیے اس کی تصدیق مثالوں سے کرتے ہیں۔

2.2.8 خاصیت مبادلہ

ناطق اعداد کی خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع

فرض کریں کہ $\frac{p}{q}$ اور $\frac{r}{s}$ کوئی سے دو ناطق اعداد ہیں تو جمع کی خاصیت مبادلہ کے قانون کے مطابق ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$$

مثال 1: ثابت کیجیے کہ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

حل: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S.} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

L.H.S = R.H.S

ناطق اعداد کی خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب

ضرب کی خاصیت مبادلہ کے مطابق کسی بھی دو ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ اور $\frac{r}{s}$ کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \times \frac{p}{q}$$

مثال 2: ثابت کیجیے کہ $\left(-\frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

حل: $\left(-\frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{5}\right)$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \left(-\frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{4} \\ &= -\frac{2}{20} = -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= \frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{5}\right) \\ &= -\frac{2}{20} = -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

L.H.S = R.H.S

نتیجہ: ناطق اعداد کے لیے خاصیت مبادلہ بلحاظ جمع اور ضرب درست ثابت ہوتا ہے۔

2.2.9 خاصیت تلازم

ناطق اعداد کی خاصیت تلازم بلحاظ جمع

فرض کریں کہ $\frac{p}{q}$ ، $\frac{r}{s}$ اور $\frac{t}{u}$ کوئی سے تین ناطق اعداد ہیں تو جمع کی خاصیت تلازم کے قانون کے مطابق ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) + \frac{t}{u} = \frac{p}{q} + \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{u}\right)$$

مثال 3: ثابت کیجیے کہ $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$

حل: $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} = \left(\frac{1+2}{4}\right) + \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{15+4}{20} = \frac{19}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4} + \left(\frac{5+2}{10}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{7}{10} \\ &= \frac{5+14}{20} = \frac{19}{20} \end{aligned}$$

L.H.S = R.H.S

ناطق اعداد کی خاصیت تلازم بلحاظ ضرب

ضرب کی خاصیت تلازم کے مطابق کسی بھی تین ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ ، $\frac{r}{s}$ اور $\frac{t}{u}$ کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\left(\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}\right) \times \frac{t}{u} = \frac{p}{q} \times \left(\frac{r}{s} \times \frac{t}{u}\right)$$

مثال 4: ثابت کیجیے کہ $\left(-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{-3}{4} = -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{-3}{4}\right)$

حل: $\left(-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{-3}{4} = -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{-3}{4}\right)$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \left(-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{-3}{4} \\ &= -\frac{1}{3} \times \frac{-3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{-3}{4}\right) \\ &= -\frac{2}{3} \times \frac{-3}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

نتیجہ: ناطق اعداد کے لیے خاصیت تلازم بلحاظ جمع اور ضرب درست ثابت ہوتا ہے۔

2.2.10 ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع اور تفریق

تین ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ ، $\frac{r}{s}$ اور $\frac{t}{u}$ کے لیے خاصیت تقسیمی کے مطابق ہوتا ہے۔

$$(i) \quad \frac{p}{q} \times \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{u}\right) = \left(\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}\right) + \left(\frac{p}{q} \times \frac{t}{u}\right)$$

$$(ii) \quad \frac{p}{q} \times \left(\frac{r}{s} - \frac{t}{u}\right) = \left(\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}\right) - \left(\frac{p}{q} \times \frac{t}{u}\right)$$

مثال 5: ثابت کیجیے کہ

$$(i) \quad \frac{1}{5} \times \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{5} \times \frac{9}{10}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$(ii) \quad \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{6}\right)$$

$$(i) \quad \frac{1}{5} \times \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{5} \times \frac{9}{10}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \frac{1}{5} \times \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{5} \times \left(\frac{9+5}{10}\right) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{14}{10} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S.} &= \left(\frac{1}{5} \times \frac{9}{10}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{9}{50} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{9+5}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{6}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{3-1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{24} \\ &= \frac{3-1}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

2.3.11 ناطق اعداد کا موازنہ

ہم پچھلی جماعت میں صحیح اعداد اور کسور کے موازنے کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ موازنے کے انہی قوانین کی مدد سے ہم ناطق اعداد کا موازنہ بھی کر سکتے ہیں۔ ہم اس کی وضاحت مثالوں سے کرتے ہیں۔

پہلا کیس: ہم مخرج

مثال 6: ناطق اعداد کے دیے گئے جوڑوں کا موازنہ کریں۔

(i) $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}$

(ii) $\frac{-1}{6}, \frac{-5}{6}$

(iii) $\frac{1}{4}, \frac{-3}{4}$

حل:

(i) $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}$

$$2 < 4$$

$$\frac{2}{7} < \frac{4}{7}$$

پس

(ii) $\frac{-1}{6}, \frac{-5}{6}$

$$-1 > -5$$

$$\frac{-1}{6} > \frac{-5}{6}$$

پس

(iii) $\frac{1}{4}, \frac{-3}{4}$

$$1 > -3$$

$$\frac{1}{4} > \frac{-3}{4}$$

پس

دوسرا کیس: مختلف مخرج

مثال 7: درج ذیل ناطق اعداد کے جوڑوں کے درمیان درست علامت < یا > استعمال کیجیے۔

(i) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$

(ii) $\frac{9}{-11}, \frac{-41}{121}$

حل: (i) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$

دیے گئے ناطق اعداد کی مدد سے ایک جیسے مخرج والے ناطق اعداد لکھیے۔

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$$

ہم مخرج ناطق اعداد کے شمار کنندوں کا موازنہ کریں۔

$$5 < 6$$

$$\frac{5}{10} < \frac{6}{10}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5}$$

(ii) $\frac{9}{-11}, \frac{-41}{121}$

دونوں کے مخرجوں کو مساوی کریں۔

$$\frac{9}{-11} = \frac{9 \times (-11)}{-11 \times (-11)} = \frac{-99}{121}$$

اب ہم مخرج ناطق اعداد کے شمار کنندوں کا موازنہ کریں۔

$$\begin{aligned} -99 &< -41 \\ \frac{-99}{121} &< \frac{-41}{121} \\ \frac{9}{-11} &< \frac{-41}{121} \end{aligned}$$

2.3.12 ناطق اعداد کو ترتیب دینا

ہم دیے گئے ناطق اعداد کو ترتیب صعودی (چھوٹے سے بڑے) اور ترتیب نزولی (بڑے سے چھوٹے) میں نیچے دیے گئے اقدام عمل سے ترتیب دے سکتے ہیں۔

پہلا قدم: دیے گئے ناطق اعداد کے مخرجوں کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

دوسرا قدم: مختلف مخرج والے ناطق اعداد کو ہم مخرج ناطق اعداد میں تبدیل کریں۔

تیسرا قدم: شمار کنندوں کا موازنہ کریں اور ناطق اعداد کو صعودی یا نزولی ترتیب میں لکھیں۔

مثال 8: ناطق اعداد $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ اور $\frac{7}{8}$ کو نزولی ترتیب میں لکھیں۔

حل:

پہلا قدم: 2، 3 اور 8 کا ذواضعاف اقل 24 ہوتا ہے۔

دوسرا قدم: مختلف مخرج والے ناطق اعداد کو ہم مخرج ناطق اعداد میں تبدیل کریں۔

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 12}{2 \times 12} = \frac{12}{24} \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24} \quad \frac{7}{8} = \frac{7 \times 3}{8 \times 3} = \frac{21}{24}$$

تیسرا قدم: شمار کنندوں 12، 16 اور 21 کا موازنہ کریں اور ناطق اعداد کو نزولی ترتیب میں لکھیں۔

$$21 > 16 > 12$$

$$\frac{7}{8} > \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{21}{24} > \frac{16}{24} > \frac{12}{24} \quad \text{پس}$$

ترتیب نزولی میں لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے: $\frac{7}{8}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{2}$

مثال 9: ناطق اعداد $\frac{1}{12}$ ، $\frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{4}$ کو صعودی ترتیب میں لکھیے۔

حل:

پہلا قدم: 3، 4 اور 12 کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

دوسرا قدم: مختلف مخرج والے ناطق اعداد کو ہم مخرج ناطق اعداد میں تبدیل کریں۔

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12} \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \quad \frac{1}{12}$$

تیسرا قدم: شمار کنندوں 3، 8 اور 1 کا موازنہ کریں اور ناطق اعداد کو صعودی ترتیب میں لکھیں۔

$$1 < 3 < 8$$

$$\frac{1}{12} < \frac{1}{4} < \frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{12} < \frac{3}{12} < \frac{8}{12} \quad \text{پس}$$

پس ترتیب صعودی میں لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$

مشق 2.3

1- درج ذیل ناطق اعداد کے درمیان درست علامت $<$ ، $>$ ، $=$ لگائیے۔

(i) $\frac{1}{2}, \frac{15}{20}$	(ii) $\frac{2}{-3}, \frac{1}{6}$	(iii) $\frac{-1}{5}, \frac{2}{-10}$	(iv) $\frac{-1}{9}, \frac{-4}{3}$
(v) $-1, \frac{-2}{3}$	(vi) $\frac{1}{2}, 1$	(vii) $\frac{5}{7}, \frac{-1}{2}$	(viii) $\frac{11}{-10}, \frac{-10}{11}$
(ix) $\frac{4}{-100}, \frac{-1}{25}$	(x) $\frac{-4}{7}, \frac{5}{-2}$	(xi) $\frac{4}{9}, \frac{6}{-7}$	(xii) $\frac{-8}{11}, \frac{3}{-10}$

2- درج ذیل ناطق اعداد کو ترتیب نزولی میں لکھیے۔

(i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}$	(ii) $\frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$	(iii) $\frac{4}{7}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}$
---	--	---

3- درج ذیل ناطق اعداد کو ترتیب صعودی میں لکھیے۔

(i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$	(ii) $\frac{4}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{15}$	(iii) $\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}$
---	--	---

4- ثابت کیجیے کہ:

(i) $\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)$	(ii) $\frac{10}{11} + \left(\frac{5}{-44}\right) = \left(\frac{5}{-44}\right) + \frac{10}{11}$
(iii) $\left(\frac{12}{-105}\right) \times \left(\frac{-15}{84}\right) = \left(\frac{-15}{84}\right) \times \left(\frac{12}{-105}\right)$	(iv) $-\frac{2}{3} \times \left(\frac{7}{8} \times \frac{9}{14}\right) = \left(-\frac{2}{3} \times \frac{7}{8}\right) \times \frac{9}{14}$
(v) $\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{10}\right) = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{10}$	(vi) $\frac{1}{-2} + \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{-2} + \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{4}$
(vii) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}\right)$	(viii) $\frac{1}{4} \times \left(\frac{8}{9} - \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{8}{9}\right) - \left(\frac{1}{4} \times \frac{12}{15}\right)$
(ix) $\frac{-5}{8} \times \left(\frac{4}{7} - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{-5}{8} \times \frac{4}{7}\right) - \left(\frac{-5}{8} \times \frac{2}{3}\right)$	(x) $\frac{24}{49} \times \left(\frac{7}{8} + \frac{14}{6}\right) = \left(\frac{24}{49} \times \frac{7}{8}\right) + \left(\frac{24}{49} \times \frac{14}{6}\right)$

اعادہ مشق 2

1- درج ذیل سوالوں کے جوابات دیجیے۔

- ناطق عدد کی تعریف کریں۔
 - ناطق عدد "a" کا جمعی معکوس لکھیں۔
 - ناطق عدد $\frac{p}{q}$ جبکہ $p \neq 0$ کا معکوس کیا ہے؟
 - دونوں ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ اور $\frac{r}{s}$ کا مجموعہ لکھیں۔
 - دونوں ناطق اعداد کا حاصل ضرب معلوم کرنے کا قانون کیا ہے؟
 - جمع اور ضرب کے متضاد عوامل کون سے ہیں؟
- 2- خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

- کس اور صحیح اعداد دونوں پر مشتمل ہوتے ہیں۔
- ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ اور $\frac{-p}{q}$ ایک دوسرے کے..... معکوس کہلاتے ہیں۔
- ایسا عدد جو علامتی طور پر $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکے جبکہ p اور q صحیح اعداد اور $q \neq 0$ ہو تو ایسا عدد..... عدد کہلاتا ہے۔
- 0 جمعی ذاتی عنصر کہلاتا ہے جبکہ 1..... ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔
- ناطق عدد 0 کا کوئی..... نہیں ہوتا۔
- کسی غیر صفر ناطق عدد کا معکوس اُس کا..... معکوس ہوتا ہے۔

3- دُرست جواب پر (✓) کا نشان لگائیے۔

- ایسا عدد جو علامتی طور پر $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھا جاسکے جبکہ $p, q \in \mathbb{Z}$ اور $q \neq 0$ ہو تو وہ کہلاتا ہے:

(الف) صحیح عدد	(ب) ناطق عدد	(ج) مکمل عدد	(د) مثبت عدد
----------------	--------------	--------------	--------------
- $\frac{2}{3}$ کا جمعی معکوس ہوتا ہے:

(الف) $-\frac{2}{3}$	(ب) $\frac{3}{2}$	(ج) $\frac{1}{3}$	(د) $-\frac{3}{2}$
----------------------	-------------------	-------------------	--------------------
- $-\frac{4}{7}$ کا ضربی معکوس ہوتا ہے:

(الف) $\frac{4}{7}$	(ب) $\frac{7}{4}$	(ج) $-\frac{7}{4}$	(د) $\frac{1}{7}$
---------------------	-------------------	--------------------	-------------------

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{\quad}{\quad} \quad (\text{iv})$$

$$\frac{5}{6} \quad (\text{د})$$

$$\frac{2}{5} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{1}{6} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{5} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{2}{5} \div \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{\quad}{\quad} \quad (\text{v})$$

$$\frac{1}{2} \quad (\text{د})$$

$$-\frac{1}{2} \quad (\text{ج})$$

$$-2 \quad (\text{ب})$$

$$2 \quad (\text{الف})$$

4- نمبر لائن کھینچ کر درج ذیل ناطق اعداد کو ظاہر کیجیے۔

$$(i) \quad 1\frac{1}{2} \quad (ii) \quad 3\frac{1}{3} \quad (iii) \quad -\frac{1}{4} \quad (iv) \quad -1\frac{4}{5}$$

5- درج ذیل ناطق اعداد کے جمعی اور ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

$$(i) \quad -14 \quad (ii) \quad \frac{1}{5} \quad (iii) \quad -\frac{2}{3} \quad (iv) \quad -\frac{11}{27}$$

6- درج ذیل ناطق اعداد کے جوڑوں کے درمیان درست علامت < یا > لگائیے۔

$$(i) \quad \frac{1}{4}, \frac{-1}{2} \quad (ii) \quad \frac{2}{3}, \frac{1}{5} \quad (iii) \quad \frac{-11}{17}, \frac{3}{8}$$

$$(iv) \quad \frac{10}{13}, \frac{11}{14} \quad (v) \quad \frac{-4}{9}, \frac{2}{-5} \quad (vi) \quad \frac{5}{-22}, \frac{-11}{25}$$

7- درج ذیل کو عمل کیجیے۔

$$(i) \quad \left(\frac{-19}{55}\right) + \frac{51}{55} + \left(\frac{-21}{55}\right) \quad (ii) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \quad (iii) \quad \left(\frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$$(iv) \quad \frac{2}{7} - \frac{1}{2} + \frac{3}{14} \quad (v) \quad \frac{5}{8} + \frac{1}{5} - \frac{3}{4} \quad (vi) \quad \left(\frac{-11}{15}\right) + \left(\frac{-3}{5}\right) + \frac{5}{4}$$

8- درج ذیل کو مختصر کیجیے۔

$$(i) \quad \frac{2}{3} \div \frac{16}{21} \times \frac{27}{49} \quad (ii) \quad \left(\frac{-1}{100}\right) \div \left(\frac{1}{10}\right) \quad (iii) \quad \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{-30}{44}\right)$$

$$(iv) \quad \frac{1}{6} \times \left(\frac{-2}{3}\right) \div \left(\frac{-11}{63}\right) \quad (v) \quad \frac{-2}{7} \div \frac{3}{4} \times \frac{63}{100} \quad (vi) \quad \frac{8}{21} \div \frac{7}{12}$$

9- ثابت کیجیے کہ:

$$(i) \quad (-1) + \frac{35}{54} = \frac{35}{54} + (-1) \quad (ii) \quad \frac{-4}{5} \times \left(\frac{1}{8} + \frac{11}{12}\right) = \left(\frac{-4}{5} \times \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{-4}{5} \times \frac{11}{12}\right)$$

$$(iii) \quad \frac{4}{9} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}\right) = \left(\frac{4}{9} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{5}{7} \quad (iv) \quad \left(\frac{-121}{169}\right) \times \left(\frac{13}{-11}\right) = \left(\frac{13}{-11}\right) \times \left(\frac{-121}{169}\right)$$

$$(v) \quad \frac{-1}{4} + \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{6}\right) + \frac{3}{5} \quad (vi) \quad \frac{5}{12} \times \left(\frac{-2}{7} - 2\right) = \left(\frac{5}{12} \times \frac{-2}{7}\right) - \left(\frac{5}{12} \times 2\right)$$

خلاصہ

• ہر صحیح عدد کو کسی اور غیر صحیح عدد سے تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ جس سے حاصل ہونے والا عدد ناطق عدد کہلاتا ہے اور علامتی طور پر $\frac{p}{q}$ لکھا جاتا ہے۔

• ناطق اعداد کو باہم جمع کرتے ہیں:

$$\begin{array}{l} \text{ہم مخرج} \\ \frac{p}{s} + \frac{q}{s} = \frac{p+q}{s} \\ \text{مختلف مخرج} \\ \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+rq}{qs} \end{array}$$

• ناطق اعداد کو باہم تفریق کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{l} \text{ہم مخرج} \\ \frac{p}{s} - \frac{q}{s} = \frac{p-q}{s} \\ \text{مختلف مخرج} \\ \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps-rq}{qs} \end{array}$$

• دو ناطق اعداد کا حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے ایک عدد کے شمار کنندہ کو دوسرے عدد کے شمار کنندہ سے ضرب دیتے ہیں۔ اسی طرح مخرجوں کو ضرب دیتے ہیں۔ پس دو ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ اور $\frac{r}{s}$ کے لیے

$$\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$$

• تقسیم ضرب کا متضاد عمل ہوتا ہے۔ پس ناطق عدد $\frac{p}{q}$ اور غیر صحیح ناطق عدد $\frac{r}{s}$ کے لیے

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}$$

• 0 جمعی ذاتی عنصر اور 1 ضربی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔

• $\frac{p}{q}$ کا معکوس $\frac{q}{p}$ کہلاتا ہے۔

• اگر $\frac{p}{q}$ اور $\frac{r}{s}$ دو ناطق اعداد ہوں تو خاصیت مبادلہ کے مطابق:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q} \quad \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{r}{s} \times \frac{p}{q}$$

• اگر $\frac{p}{q}$ ، $\frac{r}{s}$ اور $\frac{t}{u}$ تین ناطق اعداد ہوں تو خاصیت تلازم کے مطابق:

$$(i) \quad \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) + \frac{t}{u} = \frac{p}{q} + \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{u}\right) \quad (ii) \quad \left(\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}\right) \times \frac{t}{u} = \frac{p}{q} \times \left(\frac{r}{s} \times \frac{t}{u}\right)$$

• اگر $\frac{p}{q}$ ، $\frac{r}{s}$ اور $\frac{t}{u}$ تین ناطق اعداد ہوں تو خاصیت تقسیمی کے مطابق:

$$(i) \quad \frac{p}{q} \times \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{u}\right) = \left(\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}\right) + \left(\frac{p}{q} \times \frac{t}{u}\right) \quad (ii) \quad \frac{p}{q} \times \left(\frac{r}{s} - \frac{t}{u}\right) = \left(\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}\right) - \left(\frac{p}{q} \times \frac{t}{u}\right)$$