یونٹ-1 سیٹوں پر عوامل (Operations on Sets)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- درج ذیل سیٹوں کو پہچان سکیں۔
  - قدرتی اعداد (N)
  - مکمل اعداد (W)
  - صحیح اعداد (Z)
  - ناطق اعداد (Q)
  - جفت اعداد (E)
  - طاق اعداد (O)
  - مفرد اعداد (P)
- سیٹ کا تحتی سیٹ معلوم کر سکیں۔
- واجب ($\subset$) اور غیر واجب ($\subseteq$) تحتی سیٹ کی تعریف کر سکیں۔
- سیٹ (A) کا قوت سیٹ P(A) معلوم کر سکیں۔
- یونین اور تقاطع کے قوانین مبادلہ اور قوانین تلازم کی پڑتال کر سکیں۔
- تقسیمی قوانین کی پڑتال کر سکیں۔
- ڈی مارگن کے قوانین کو بیان کر سکیں اور ان کی پڑتال کر سکیں۔
- تین متراکب سیٹوں کا یونین اور تقاطع دکھا سکیں۔
- قانونِ تلازم اور تقسیمی قوانین کی بذریعہ وین اشکال پڑتال کر سکیں۔

1.1 سیٹ (Sets)

واضع اشیا کے اجتماع کو سیٹ کہتے ہیں۔ جن اشیا پر سیٹ مشتمل ہوتا ہے وہ اس سیٹ کے ارکان یا ممبران کہلاتے ہیں۔

1.1.1 سیٹ

اہم سیٹ اور اُن کی علامتوں کی پہچان:

قدرتی اعداد کا سیٹ	$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$
مکمل اعداد کا سیٹ	$W = \{0, 1, 2, \ldots\}$
صحیح اعداد کا سیٹ	$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
مفرد اعداد کا سیٹ	$P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$
طاق اعداد کا سیٹ	$O = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$
جفت اعداد کا سیٹ	$E = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\}$
ناطق اعداد کا سیٹ	$Q = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z \wedge q \neq 0\}$

1.1.2 تحتی سیٹ (Subset)

مندرجہ ذیل مثالوں کی مدد سے اس کی وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 1: سیٹ $\{2,4\}$ کے تمام تحتی سیٹ معلوم کریں۔

حل: سیٹ $\{2,4\}$ کے تمام تحتی سیٹ درج ذیل ہیں:

$\phi, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}$

مثال 2: سیٹ $\{3,5,7\}$ کے تمام تحتی سیٹ معلوم کریں۔

حل: سیٹ $\{3,5,7\}$ کے تمام تحتی سیٹ درج ذیل ہیں:

$\phi, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{3,5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{3, 5, 7\}$

مثال 3: سیٹ $\{a, b, c, d\}$ کے تمام تحتی سیٹ معلوم کریں۔

حل: سیٹ $\{a, b, c, d\}$ کے تمام تحتی سیٹ درج ذیل ہیں:

$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$

$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$

1.1.3 تعریفیں (Definitions)

(a) واجب تحتی سیٹ (Proper Subset)

اگر A اور B دو سیٹ ہوں اور سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا بھی رکن ہو لیکن سیٹ A کا کم از کم ایک رکن ایسا ہو جو سیٹ B کا رکن نہ ہو تو سیٹ A سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ کہلائے گا۔ اس کو علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں $A \subset B$ اور اسے پڑھتے ہیں سیٹ A واجب تحتی سیٹ ہے سیٹ B کا۔

مثال کے طور پر:

اگر $A=\{1, 2, 3\}$ اور $B=\{1, 2, 3, 4\}$ تو $A\subset B$ کیونکہ سیٹ A کے تمام ارکان سیٹ B کے ارکان ہیں لیکن سیٹ B کا ایک رکن 4 سیٹ A کا رکن نہیں ہے۔

یاد رکھیے کہ:

(i) ہر سیٹ اپنا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

(ii) خالی سیٹ ہر سیٹ (جو خالی نہ ہو) کا واجب تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

(b) غیر واجب تحتی سیٹ (Improper Subset)

اگر A اور B دو سیٹ ہوں اور سیٹ A، سیٹ B کا تحتی سیٹ ہو اور سیٹ B بھی سیٹ A کا تحتی سیٹ ہو تو سیٹ A سیٹ B کا غیر واجب تحتی سیٹ ہوگا اور سیٹ B سیٹ A کا غیر واجب تحتی سیٹ ہوگا۔

نوٹ **(i)** ایک سیٹ کے تمام تحتی سیٹ ماسوائے خود سیٹ کے واجب تحتی سیٹ ہوتے ہیں۔

(ii) واجب تحتی سیٹ لکھنے کا طریقہ:

سب سے پہلے خالی سیٹ لکھیں۔ پھر یک رکنی سیٹ (ایسا سیٹ جس کا صرف ایک رکن ہو۔ یک رکنی سیٹ کہلاتا ہے) اس کے بعد دو دو ارکان والے سیٹ اور اسی طرح اس عمل کو اس وقت تک جاری رکھیں جب تک آخری سیٹ میں ارکان کی تعداد دیے ہوئے سیٹ کے ارکان کی تعداد کے برابر نہ ہو جائے۔

(iii) ہر سیٹ اپنا غیر واجب تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

(iv) خالی سیٹ کا کوئی واجب تحتی سیٹ نہیں ہوتا۔

(v) یک رکنی سیٹ کا صرف ایک واجب تحتی سیٹ ہوتا ہے۔

1.1.4 قوت سیٹ / پاور سیٹ (Power Set)

ایک سیٹ کے تمام ممکن تحتی سیٹوں کو سیٹ A کا پاور سیٹ کہتے ہیں اور اسے $P(A)$ لکھتے ہیں

مثال کے طور پر:

اگر $A=\{a, b\}$، تو اس کے تمام ممکن تحتی سیٹ یہ ہیں: $\phi\ ,\ \{a\}\ ,\ \{b\}\ ,\ \{a, b\}$

پس A کا پاور سیٹ

$$P(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

مثال4: $B=\{3, 6, 9\}$ کا پاور سیٹ لکھیں۔

حل: $B=\{3, 6, 9\}$

$$P(B)=\{\ \phi\ , \{3\} , \{6\} , \{9\} , \{3,6\} , \{3, 9\} , \{6, 9\} , \{3, 6, 9\}\}$$

یاد رکھیے کہ:
اگر ایک سیٹ کے n ارکان ہوں، تو اس کے تمام ممکن تحتی سیٹ 2^n ہوں گے۔

مثلاً اگر $X=\{1, 2, 3\}$ ہو تو اس کے تمام تحتی سیٹ ہیں:

$$\phi\ , \{1\} , \{2\} , \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

ان کی تعداد 8 ہے اور $2^3=8$

کیا آپ بتا سکتے ہیں؟
اگر ایک سیٹ A، 4 ارکان پر مشتمل ہو تو $P(A)$ کے ارکان کی تعداد کتنی ہو گی؟

یاد رکھیے کہ:
- $P(A)$ کے ارکان سیٹ A کے تمام تحتی سیٹوں پر مشتمل ہوتے ہیں۔ یعنی $\{a\} \in P(A)$ لیکن $a \notin P(A)$
- خالی سیٹ کا پاور سیٹ خالی سیٹ نہیں ہوتا کیونکہ خالی سیٹ کے تحتی سیٹوں کی تعداد 1 ہے یعنی $1=2^0$
  یعنی: $P(\phi) = \{\phi\}$ یا $\{\{\}\}$

مشق 1.1

1- مندرجہ ذیل سیٹوں کے تمام تحتی سیٹ لکھیں۔

(i) $\{\ \}$ **(ii)** $\{1\}$ **(iii)** $\{a, b\}$

2- مندرجہ ذیل سیٹوں کے تمام واجب تحتی سیٹ لکھیں۔

(i) $\{a\}$ **(ii)** $\{0, 1\}$ **(iii)** $\{1, 2, 3\}$

3- مندرجہ ذیل سیٹوں کے پاور سیٹ لکھیں۔

(i) $\{-1\}$ **(ii)** $\{a, b, c\}$

1.2 سیٹوں پر عوامل (Operations on Sets)

1.2.1 سیٹوں پر یونین اور تقاطع کے مبادلہ قوانین (Verification of Commutative and Associative Laws w.r.t. Union and Intersection)

اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو مبادلہ قوانین یونین اور تقاطع کے مطابق یوں لکھے جاتے ہیں:

(i) (یونین کا قانونِ مبادلہ) $A \cup B = B \cup A$ **(ii)** (تقاطع کا قانونِ مبادلہ) $A \cap B = B \cap A$

مثال1: اگر $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ اور $B = \{3, 5, 7, 9\}$ تو

(i) یونین کا قانونِ مبادلہ (ii) تقاطع کا قانونِ مبادلہ کی پڑتال(verification) کریں۔

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}, B = \{3, 5, 7, 9\}$$

حل: (i)

$$A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\} \cup \{3, 5, 7, 9\}$$
$$= \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$
$$B \cup A = \{3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$
$$= \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$

پس $A \cup B = B \cup A$

(ii)

$$A \cap B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\} \cap \{3, 5, 7, 9\}$$
$$= \{3, 5, 7, 9\}$$
$$B \cap A = \{3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$
$$= \{3, 5, 7, 9\}$$

پس $A \cap B = B \cap A$

- **یونین اور تقاطع کے قوانینِ تلازم**

اگر A، B اور C تین سیٹ ہوں تو قوانین تلازم بلحاظ یونین اور تقاطع بالترتیب یوں لکھتے ہیں:

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

یاد رکھیے کہ:

تین سیٹوں کا یونین/تقاطع معلوم کرنے کے لیے پہلے کوئی سے دو سیٹوں کا یونین/ تقاطع معلوم کریں اور پھر حاصل شدہ سیٹ کا تیسرے سیٹ سے یونین/تقاطع معلوم کریں۔

مثال2: یونین کے قانونِ تلازم کی پڑتال: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

جب کہ $C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ اور $A = \{1, 2, 3, 4\}, \; B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

حل: $C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ اور $A = \{1, 2, 3, 4\}, \; B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup (\{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10\})$$
$$= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$(A \cup B) \cup C = (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}) \cup \{6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\ 10\} \quad \text{............. (b)}$$

مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ L. H. S = R. H. S

پس $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

مثال3: تقاطع کے قانونِ تلازم کی پڑتال: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

جب کہ A، B اور C درج بالا مثال والے سیٹ ہیں۔

حل:
$$A \cap (B \cap C) = \{l, 2, 3, 4\} \cap (\{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{6, 7, 8, 9, 10\})$$
$$= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{6, 7, 8\}$$
$$= \phi \quad \text{............. (a)}$$
$$(A \cap B) \cap C = (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}) \cap \{6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$= \{3, 4\} \cap \{6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$= \phi \quad \text{............. (b)}$$

پس مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

1.2.2 سیٹوں کے قوانین تقسیمی کی پڑتال (Verification of Distributive Laws)

- اگر A، B اور C تین سیٹ ہوں تو $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ یونین کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تقاطع کہلاتی ہے۔
- اگر A، B اور C تین سیٹ ہوں تو $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ تقاطع کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ یونین کہلاتی ہے۔

مثال4: پڑتال کریں۔

(i) یونین کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ تقاطع (ii) تقاطع کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ یونین

جب کہ $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ ، $B = \{5, 10, 15, \ldots, 30\}$ اور $C = \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$

حل: (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$L.H.S = A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, \ldots, 20\} \cup (\{5, 10, 15, \ldots, 30\} \cap \{3, 9, 15, 21, 27, 33\})$$
$$= \{1, 2, 3, \ldots, 20\} \cup \{15\}$$
$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, \ldots, 20\} \quad \text{............. (a)}$$
$$R.H.S = A \cup B = \{1,2,3, \ldots,20\} \cup \{5, 10, 15, \ldots,30\}$$
$$= \{1, 2, 3, \ldots, 20, 25, 30\}$$

اور $A \cup C = \{1, 2, 3, \ldots, 20\} \cup \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$
$$= \{1, 2, 3, \ldots, 20, 21, 27, 33\}$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 20, 25, 30\} \cap \{1, 2, 3, \ldots, 20, 21, 27, 33\}$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, \ldots, 20\} \quad \text{............. (b)}$$

پس مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$L.H.S = A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, \ldots, 20\} \cap (\{5, 10, 15, \ldots, 30\} \cup \{3, 9, 15, 21, 27, 33\})$

$= \{1, 2, 3, \ldots, 20\} \cap \{3, 5, 9, 10, 15, 20, 21, 25, 27, 30, 33\}$

$A \cap (B \cup C) = \{3, 5, 9, 10, 15, 20\}$ .... (a)

$R.H.S = A \cap B = \{1, 2, 3, \ldots, 20\} \cap \{5, 10, 15, \ldots, 30\}$

$= \{5, 10, 15, 20\}$

اور $A \cap C = \{1, 2, 3, \ldots, 20\} \cap \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$

$= \{3, 9, 15\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{5, 10, 15, 20\} \cup \{3, 9, 15\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 5, 9, 10, 15, 20\}$ .... (b)

پس مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

آگسٹس ڈی مارگن (1806-1871)، ایک برطانوی ریاضی دان جنھوں نے ڈی مارگن کے قوانین وضع کیے

1.2.3 ڈی مارگن کے قوانین (De Morgan's Laws)

اگر A اور B ایک یونیورسل سیٹ U کے تحتی سیٹ ہوں تو

(i) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ (ii) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

مثال 5: ڈی مارگن کے قوانین کی پڑتال کریں جبکہ

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ اور $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

حل: (i) $L.H.S = (A \cup B)^C$

$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\therefore \quad (A \cup B)^C = U - (A \cup B) = \{8, 9, 10\}$ .... (a)

$R.H.S = A^C \cap B^C$

$A^C = U - A$

$= \{1, 2, 3, \ldots, 10\} - \{2, 4, 6\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

$B^C = U - B$

$B^C = \{1, 2, 3, \ldots, 10\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$B^C = \{8, 9, 10\}$

$\therefore \quad A^C \cap B^C = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} \cap \{8, 9, 10\}$

$= \{8, 9, 10\}$ .... (b)

پس مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(ii) $L.H.S = (A \cap B)^C$

$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$= \{2, 4, 6\}$

$(A \cap B)^C = U - (A \cap B)$

$= \{1, 2, 3, ..., 10\} - \{2, 4, 6\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ .... (a)

$R.H.S = A^C = U - A = \{1, 2, 3, ..., 10\} - \{2, 4, 6\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

$B^C = U - B = \{1, 2, 3, ..., 10\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$= \{8, 9, 10\}$

$\therefore \quad A^C \cup B^C = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\} \cup \{8, 9, 10\}$

$= \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ .... (b)

(a) اور (b) کا موازنہ کرنے سے

پس مساوات (a) اور (b) سے ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ L. H. S = R. H. S

پس $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

مشق 1.2

1- پڑتال کریں۔ (a) $A \cup B = B \cup A$ اور (b) $A \cap B = B \cap A$

جبکہ

(i) $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}, \quad B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

(ii) $A = \{1, 2, 3, ..., 15\}, \quad B = \{6, 8, 10, ..., 20\}$

2- پڑتال کریں۔ (a) $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ اور (b) $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

جبکہ

(i) $X = \{a, b, c, d\}, Y = \{b, d, c, f\}$ اور $Z = \{c, f, g, h\}$

(ii) $X = \{1, 2, 3, ..., 10\}, Y = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ اور $Z = \{5, 6, 7, 8\}$

(iii) $X = \{-1, 0, 2, 4, 5\}, Y = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ اور $Z = \{4, 6, 8, 10\}$

(iv) $X = \{1, 2, 3, ..., 14\}, Y = \{6, 8, 10, ..., 20\}$ اور $Z = \{1, 3, 5, 7\}$

3- ثابت کریں۔ اگر $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{b, d, f\}$ اور $C = \{a, f, c\}$ تو $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

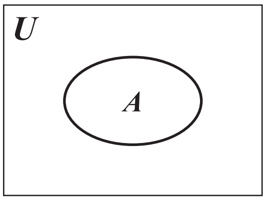
4- ثابت کریں۔ اگر $A = \{0\}$ ، $B = \{0, 1\}$ اور $C = \{\ \}$ تو $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5- ڈی مارگن کے قوانین کی پڑتال کریں۔ اگر $A = \phi$ ، $B = P$ اور $U = N$

1.3 وین اشکال (Venn Diagrams)

سیٹوں پر عوامل بذریعہ وین اشکال

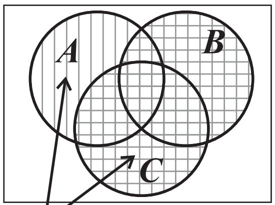

جان وین (1834-1923)، انگریز ریاضی دان جنھوں نے وین اشکال متعارف کرائیں۔



یونیورسل سیٹ کو مستطیل سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کے تحتی سیٹوں کو اس کے اندر کسی بند شکل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ساتھ دی ہوئی شکل میں $A \subseteq U$ کو وین اشکال کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔

1.3.1 تین متراکب سیٹوں کے یونین اور تقاطع کے بذریعہ وین اشکال اظہار

(i) $A \cup (B \cup C)$



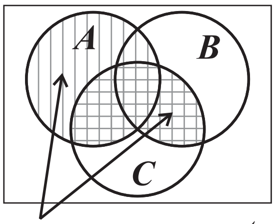
شکل (i) $A \cup (B \cup C)$

پہلے $B \cup C$ کو افقی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

$A \cup (B \cup C)$ کو عمودی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

یوں $A \cup (B \cup C)$ میں دوہری لائنوں والا اور اکیلی لائنوں والا حصہ شامل ہے۔

(ii) $A \cup (B \cap C)$



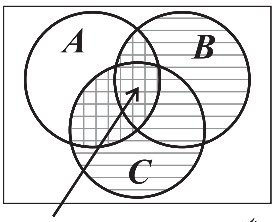
شکل (ii) $A \cup (B \cap C)$

پہلے $B \cap C$ کو افقی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

$A \cup (B \cap C)$ کو عمودی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

یوں $A \cup (B \cap C)$ میں دوہری لائنوں والا اور اکیلی لائنوں والا حصہ شامل ہے۔

(iii) $A \cap (B \cup C)$



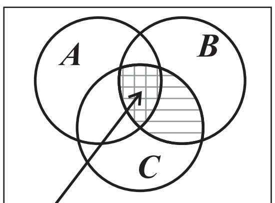
شکل (iii) $A \cap (B \cup C)$

پہلے $B \cup C$ کو افقی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

$A \cap (B \cup C)$ کو عمودی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

یوں $A \cap (B \cup C)$ میں صرف دوہری لائنوں والا حصہ شامل ہے۔ یعنی چھوٹے ڈبوں سے

(iv) $A \cap (B \cap C)$



شکل (iv) $A \cap (B \cap C)$

پہلے $B \cap C$ کو افقی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

$A \cap (B \cap C)$ کو عمودی لائنوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

یوں صرف دوہری لائنوں والا حصہ $A \cap (B \cap C)$ کو ظاہر کرتا ہے۔

1.3.2 وین اشکال کے ذریعے قانونِ تلازم اور تقسیمی کی تصدیق

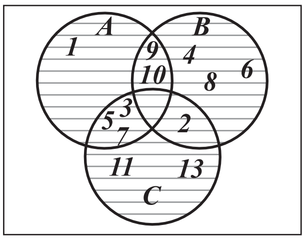
- **قوانین تلازم**

(a) یونین کا قانونِ تلازم

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

جبکہ $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ اور $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$L.H.S = A \cup (B \cup C)$



شکل(v)

$B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} \cup \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$

$A \cup (B \cup C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$

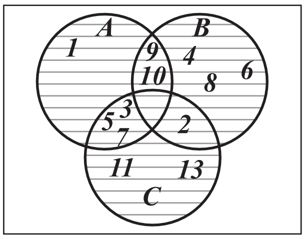
$R.H.S = (A \cup B) \cup C$

$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cup \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$



شکل(vi)

اشکال(v)اور(vi)کاموازنہ کرنے سے یہ واضح ہے کہ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(b) تقاطع کا قانونِ تلازم $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

جبکہ $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ اور $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

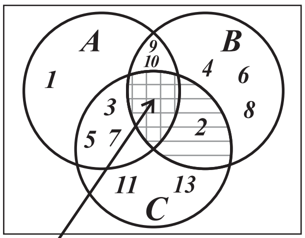
$L.H.S = A \cap (B \cap C)$

$B \cap C = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} = \{2\}$

$A \cap (B \cap C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cap \{2\} = \{\ \}$

افقی لائنیں $B \cap C$ اور عمودی لائنیں $A \cap (B \cap C)$ کو ظاہر کرتی ہیں۔

یوں $A \cap (B \cap C) = \{\ \}$



$A \cap (B \cap C)$ شکل(vii)

$R.H.S = (A \cap B) \cap C$

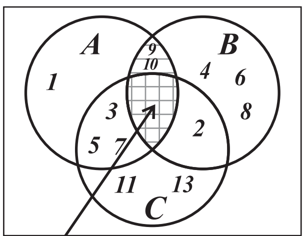
$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cap \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} = \{9, 10\}$

$(A \cap B) \cap C = \{9, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} = \{\ \}$

افقی لائنیں $A \cap B$ اور عمودی لائنیں $(A \cap B) \cap C$ کو ظاہر کرتی ہیں۔

شکل(vii)اور(viii)کاموازنہ کرنے سے یہ واضح ہے کہ

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$



$(A \cap B) \cap C$ شکل(viii)

• قوانین تقسیمی

(a) تقاطع کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ یونین

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

جبکہ $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ اور $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$L.H.S = A \cap (B \cup C)$

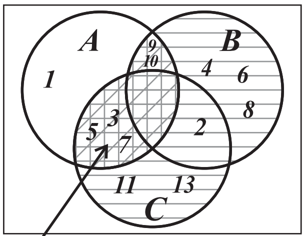
$B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} \cup \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$

$A \cap (B \cup C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}$

$= \{3, 5, 7, 9, 10\}$

$B \cup C$ کو افقی لائنیں، $A \cap (B \cup C)$ کو عمودی لائنیں اور $A \cap (B \cup C)$ کو ترچھی لائنیں ظاہر کرتی ہیں۔



$A \cap (B \cup C)$ شکل (ix)

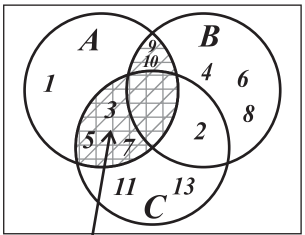
$R.H.S = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cap \{2, 4, 6, 8, 9, 10\} = \{9, 10\}$

$A \cap C = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} = \{3, 5, 7\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{9, 10\} \cup \{3, 5, 7\} = \{3, 5, 7, 9, 10\}$

$A \cap B$ کو افقی لائنیں، $A \cap C$ کو عمودی لائنیں اور $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ کو ترچھی لائنیں ظاہر کرتی ہیں۔



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ شکل (x)

اشکال (ix) اور (x) کا موازنہ کرنے سے واضح ہے کہ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

پس تقاطع کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ یونین برقرار ہے۔

(b) یونین کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ تقاطع $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

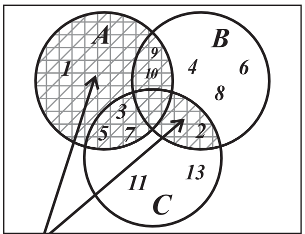
جبکہ $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ ، $B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$

اور $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$L.H.S = A \cup (B \cap C)$

$B \cap C = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{2, 3, 5, 7, 11, 13\} = \{2\}$

$B \cap C$ کو افقی لائنیں، $A \cup (B \cap C)$ کو عمودی لائنیں اور یوں $A \cup (B \cap C)$ کو ترچھی لائنیں ظاہر کرتی ہیں۔



$A \cup (B \cap C)$ شکل (xi)

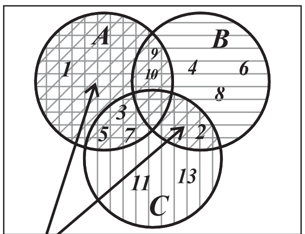
$A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cup \{2\}$

$= \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$

$R.H.S = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cup \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ شکل (xii)

$$A \cup C = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\} \cup \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$
$$= \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13\}$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13\}$$
$$= \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$$

$A \cup B$ کو افقی لائنیں، $A \cup C$ کو عمودی لائنیں اور یوں $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ کو ترچھی لائنیں ظاہر کرتی ہیں۔

اشکال (xi) اور (xii) کا موازنہ کرنے سے واضح ہے کہ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

پس یونین کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ تقاطع برقرار ہے۔

مشق 1.3

1- مندرجہ ذیل سیٹوں کے یونین اور تقاطع کے قانون مبادلہ کی بذریعہ وین اشکال پڑتال کریں۔

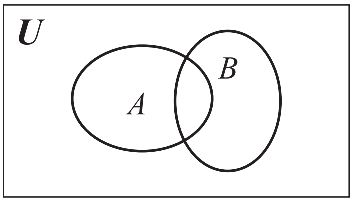
(i) $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
$B = \{5, 9, 13, 17, 21, 25\}$

(ii) سیٹ N اور سیٹ Z

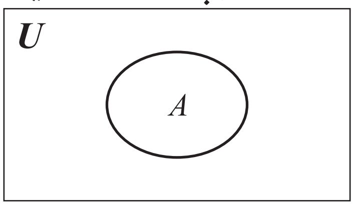
(iii) $C = \{x \mid x \in N \wedge 8 \leq x \leq 18\}$
$D = \{y \mid y \in N \wedge 9 \leq y \leq 19\}$

(iv) سیٹ E اور سیٹ O

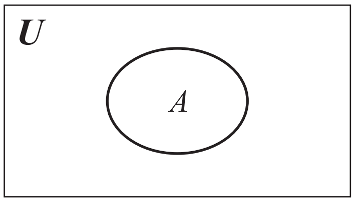
2- مندرجہ ذیل اشکال بنا کر اور عوامل جو ہر ایک شکل کے نیچے ہیں کے مطابق سایہ دار کریں۔



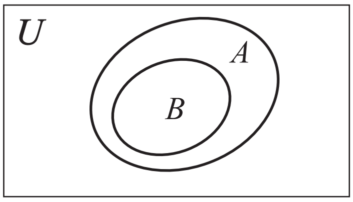
$A \cup B$



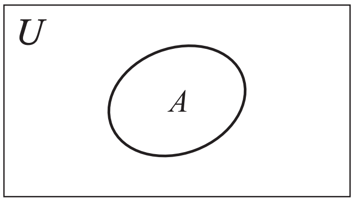
$U \cup A$



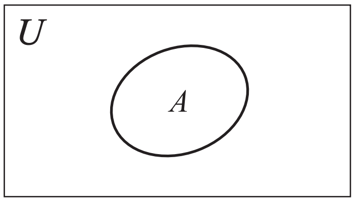
$A \cup A$



$A \cap B$



$U \cap A$



$A \cap A$

3- دیے ہوئے سیٹوں کی مدد سے مندرجہ ذیل قوانین کی وین اشکال کی مدد سے پڑتال کریں۔

(i) سیٹوں کے یونین کا قانونِ تلازم

(ii) سیٹوں کے تقاطع کا قانونِ تلازم

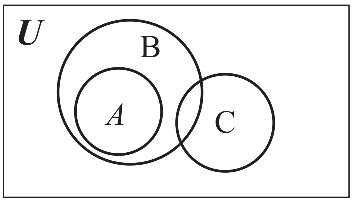
(iii) یونین کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ تقاطع

(iv) تقاطع کی خاصیتِ تقسیمی بلحاظ یونین

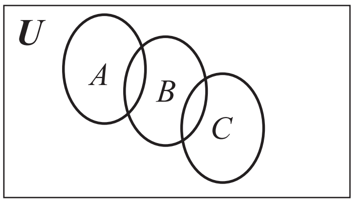
(a) جبکہ $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ ، $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ اور $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

(b) $A = \{x \mid x \in Z \wedge 8 \leq x \leq 25\}$ ، $B = \{y \mid y \in Z \wedge -2 < y < 6\}$ اور $C = \{z \mid z \in Z \wedge z \leq 8\}$

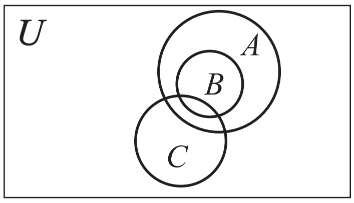
4- نیچے دی گئی وین اشکال بنائیں اور انہیں ہر شکل کے نیچے دیے ہوئے عوامل کے مطابق سایہ دار بنائیں۔



$(A\cap B)\cup C$



$(A\cup B)\cap C$



$(A\cap B)\cup C$

جائزہ مشق 1

1- ہر بیان کے نیچے چار جواب دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) اگر a سیٹ A کا رکن نہیں تو علامتی طور پر اسے کیسے لکھتے ہیں؟

(a) $a\in A$ **(b)** $a\backslash A$ **(c)** $a\notin A$ **(d)** $a\cap A$

(ii) مندرجہ ذیل میں سے کون سا سیٹ نہیں ہے؟

(a) $\{1, 2, 3\}$ **(b)** $\{a, b, c\}$ **(c)** $\{2, 3, 4\}$ **(d)** $\{1, 2, 3 -2\}$

(iii) سیٹ $\{0\}$ کے تحتی سیٹوں کی تعداد کتنی ہے؟

(a) ایک **(b)** دو **(c)** تین **(d)** چار

(iv) X کے تمام تحتی سیٹوں پر مشتمل سیٹ کیا کہلاتا ہے؟

(a) تحتی سیٹ **(b)** یونیورسل سیٹ **(c)** پاور سیٹ **(d)** سُپر/فوقی سیٹ

(v) اگر A، B اور C تین سیٹ ہوں تو $(A\cup B)\cup C$ کس کے برابر ہوگا؟

(a) $(A\cup B)\cap C$ **(b)** $(A\cap B)$ **(c)** $A\cup(B\cup C)$ **(d)** $(A\cap B)\cap C$

(vi) اگر A اور B دو سیٹ ہوں تو $A-B^c$ کس کے برابر ہوگا؟

(a) $A\cap B^C$ **(b)** $A^C\cap B$ **(c)** $A\cap B$ **(d)** $A\cup B$

(vii) اگر $A=\{2,4,6,....,10\}$، $B=\{1,3,5,....,9\}$ اور $U=\{1,2,3,....,10\}$ تو سیٹ $(A-B)^c$ کس کے برابر ہوگا؟

(a) U **(b)** B **(c)** A **(d)** ϕ

(viii) اگر $P(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ تو سیٹ A کس کے برابر ہوگا؟

(a) ϕ **(b)** $\{a\}$ **(c)** $\{b\}$ **(d)** $\{a, b\}$

(ix) اگر ϕ ایک خالی سیٹ ہو تو $(\phi^C)^C$ کس کے برابر ہوگا؟

(a) X **(b)** O **(c)** ϕ **(d)** $\{0\}$

2- مندرجہ ذیل سوالات کے مختصر جوابات لکھیں۔

(i) سیٹ کی تعریف کریں۔

(ii) قدرتی اعداد اور مکمل اعداد میں کیا فرق ہے؟

(iii) واجب اور غیر واجب تحتی سیٹ کی تعریف کریں۔

(iv) پاور سیٹ کی تعریف کریں۔

(v) ڈی مارگن کے قوانین لکھیں۔

3- نیچے دیئے ہوئے سیٹوں کے تمام تحتی سیٹ لکھیں۔

(i) $A=\{e, f, g\}$ اور $B=\{1, 3, 5\}$

(ii) $\{a, b, c\}$ کا پاور سیٹ لکھیں۔

(iii) ڈی مارگن کے قوانین کی پڑتال کریں۔ اگر

$A=\{d, e\}$ ، $B=\{a, b, c\}$ اور $U=\{a, b, c, d, e\}$

خلاصہ

- واضح اشیا کے اجتماع کو سیٹ کہتے ہیں۔ جن اشیا پر سیٹ مشتمل ہوتا ہے۔ وہ اس سیٹ کے ارکان یا ممبران کہلاتے ہیں۔
- سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے۔ اگر سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کا بھی رکن ہو۔
- خالی سیٹ تمام سیٹ کا تحتی سیٹ ہوتا ہے۔
- اگر سیٹ A سیٹ B کا تحتی سیٹ ہے اور سیٹ A سیٹ B کے برابر نہیں یعنی سیٹ B کا کم از کم ایک رکن سیٹ A میں نہیں ہے تو سیٹ A سیٹ B کا واجب تحتی سیٹ ہے اور اسے علامتی طور پر لکھتے ہیں $A \subset B$ ۔
- دو سیٹوں A اور B کا تقاطع سیٹ ایسا سیٹ ہوتا ہے جو سیٹ A اور سیٹ B کے مشترک ممبران پر مشتمل ہو۔
- دو سیٹوں A اور B کا یونین سیٹ ایسا سیٹ ہوتا ہے جو سیٹ A اور سیٹ B کے تمام ممبران پر مشتمل ہو اور مشترک ممبران صرف ایک دفعہ لکھیں جائیں۔
- اگر A اور B کوئی دو سیٹ ہوں تو:

(i) (یونین کا قانونِ مبادلہ) $A \cup B = B \cup A$

(ii) (تقاطع کا قانونِ مبادلہ) $A \cap B = B \cap A$

- اگر B،A اور C کوئی تین سیٹ ہوں تو:

(i) (سیٹوں کے یونین کا قانونِ تلازم) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(ii) (سیٹوں کے تقاطع کا قانونِ تلازم) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- اگر B،A اور C کوئی تین سیٹ ہوں تو تقسیمی قانون نیچے دیے گئے ہیں:

(یونین کا قانونِ تقسیم بلحاظ تقاطع) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(تقاتع کا قانونِ تقسیم بلحاظ یونین) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- اگر B،A اور C کوئی تین سیٹ ہوں تو ڈی مارگن کے قوانین کے مطابق:

(i) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(ii) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

- وین اشکال سیٹوں کی تصویری نمائندگی اور ان پر کیے گئے عوامل ہیں۔