

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- اثباتی جیومیٹری کی تعریف کر سکیں۔
- استدلال کی بنیادیں بیان کر سکیں۔
- بنیادی مفروضوں کی اقسام اصول متعارفہ (Axioms) اور اصول موضوعہ (Postulates) بیان کر سکیں۔
- مسئلہ کے حصے بتا سکیں۔
- جیومیٹری میں مسئلہ (Theorem)، نتیجہ صریح (Corollary) اور عکس مسئلہ (Converse of a theorem) کا مطلب بیان کر سکیں۔
- درج ذیل مسائل اور نتائج صریح کو ثابت کر سکیں اور ان کے متعلقہ سوالات پر ان کا اطلاق کر سکیں۔
 - اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر واقع ہو تو اس طرح جو دو متصل زاویے پیدا ہوتے ہیں ان کا مجموعہ دو قائمہ زاویہ ہوتا ہے
 - اگر دو متصل زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویے ہوں تو ان کے بیرونی بازو ایک ہی خط مستقیم میں ہوں گے۔
 - اگر دو خطوط مستقیم ایک دوسرے کو قطع کریں تو اسی متقابلہ زاویے متماثل ہوں گے۔
 - اگر کسی مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوں تو ان اضلاع کے متقابلہ زاویے بھی باہم متماثل ہوں گے۔
 - مثلث کے تینوں زاویوں کی پیمائشوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

10.1 اثباتی جیومیٹری کی تعریف (Define Demonstrative Geometry)

اثباتی جیومیٹری ریاضی کی ایک ایسی شاخ ہے جس میں جیومیٹری کے مسائل کا حل منطقی استدلال سے معلوم کیا جاتا ہے۔ اس میں جیومیٹری کی اشکال سے مدد لی جاتی ہے۔ جس میں ریاضی کے مسائل کی سچائی کو ثابت کیا جاتا ہے۔

10.1.1 استدلال کی بنیادیں (Basics of Reasoning)

ریاضی میں استدلال کی بنیادیں یہ ہیں:

- بنیادی تصورات (Basic Concepts)
- بعض ایسے تصورات ہیں جنہیں تعریف کے بغیر قبول کر لیا جاتا ہے۔ مثلاً نقطہ، خط اور مستوی۔

• مفروضے (Assumptions)

کچھ بیانات کو بغیر ثبوت کے درست تسلیم کر لیا جاتا ہے۔ انہیں بنیادی مفروضے کہتے ہیں۔

10.1.2 مفروضوں کی اقسام (Types of Assumptions)

• اصول متعارفہ (Axioms)

اصول متعارفہ ریاضی کی تقریباً تمام شاخوں میں مشترک ہوتا ہے۔ اسے بغیر ثبوت کے تسلیم کیا جاتا ہے۔

اصول متعارفہ کی مثالیں

- کل ہمیشہ جزو سے بڑا ہوتا ہے یا جزو کبھی کل کے برابر نہیں ہوتا۔
- اشیاء جو ایک ہی چیز کے برابر ہوں آپس میں بھی برابر ہوتی ہیں۔
- اگر برابر میں سے برابر تفریق کیے جائیں تو فرق بھی برابر ہوتے ہیں۔
- برابر کے دو گنے اور ان کے نصف آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

• اصول موضوعہ (Postulates)

یہ ایسے مفروضے ہوتے ہیں جنہیں ابتداء میں ہی صحیح تسلیم کر لیا جاتا ہے۔ اور ان کا تعلق ریاضی کی کسی مخصوص شاخ سے ہوتا ہے۔

اصول موضوعہ کی مثالیں

- ایک ہی مستوی میں ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک قطعہ خط کھینچا جاتا ہے۔
- ایک قطعہ خط کو دوسری طرف لامتناہی طور پر بڑھا جا سکتا ہے۔
- ہم ایک خط مستقیم کو بڑھا کر یا ویسے ہی مطلوبہ لمبائی کا قطعہ خط کاٹ سکتے ہیں۔
- کسی زاویہ کی مقدار کا انحصار اس کے بازوؤں کی لمبائی پر نہیں ہوتا۔

10.1.3 مسئلہ کے اجزاء (Parts of Propositions)

مسئلہ ایک ایسا بیان ہوتا ہے جو درست یا غلط بھی ہو سکتا ہے۔ مسئلہ کے اجزاء کا ذکر نیچے کیا جاتا ہے۔

(i) بیان مسئلہ (Enunciation)

یہ ایک ایسا بیان ہوتا ہے جو جیومیٹری کی کسی سچائی کے متعلق ہوتا ہے اور جسے ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

(ii) معلوم (Given)

آسانی اور وضاحت کے لیے سب سے پہلے ہم اُس کو لکھ لیتے ہیں جو کچھ دیا ہوا ہوتا ہے یا جو کچھ فرض کر لیا گیا ہوتا ہے۔

(iii) مطلوب (To Prove)

اس حصہ میں وہ کچھ لکھا جاتا ہے جسے ہم ثابت کرنا چاہتے ہیں۔

(iv) عمل (Construction)

اس حصہ میں شکل میں اضافہ کیا جاتا ہے تاکہ ثبوت دینے میں آسانی ہو۔

(v) ثبوت (Proof)

اس حصہ میں استدلال کے ساتھ سچائی کو ثابت کیا جاتا ہے۔

10.1.4 ہندسی مسئلہ، نتیجہ صریح اور عکس مسئلہ کا مطلب بیان کرنا

ہندسی مسئلہ:

ہندسی مسئلہ ایک ایسا بیان ہوتا ہے جسے سچائی، استدلال اور ہندسی اشکال کی مدد سے ثابت کیا جاتا ہے۔

مسئلہ کی مثالیں:

(i) کسی بھی مثلث کے اندرونی زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔

(ii) اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو اُن کے متقابلہ اضلاع بھی آپس میں متماثل ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح (Corollary)

نتیجہ صریح بھی ایک مسئلہ ہی ہوتا ہے جو ثابت کیے گئے مسئلہ سے اخذ کیا جاتا ہے۔ مثلاً مسئلہ یہ ہے کہ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع

متماثل ہوں تو اُن کے متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔ اور نتیجہ صریح یہ ہے کہ مساوی الاضلاع مثلث کے زاویے آپس میں متماثل ہوتے ہیں۔

عکس مسئلہ (Converse of Theorem)

اگر کسی مسئلہ کے معلوم کو مطلوب اور مطلوب کو معلوم میں بدل دیا جائے تو نئے مسئلہ کو پہلے مسئلہ کا عکس مسئلہ کہتے ہیں۔

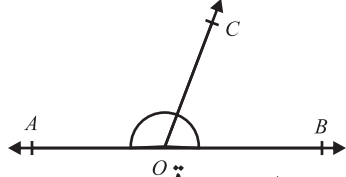
مثلاً مسئلہ فیثاغورث کا عکس مسئلہ یہ ہے کہ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کے مربع کے برابر ہو تو

مثلث قائمہ الزاویہ ہوگی۔

10.2 مسائل (Theorems)

10.2.1 درج ذیل مسائل کو بمعہ نتائج صریح ثابت کریں اور متعلقہ سوالات میں ان کا استعمال کیجیے۔

مسئلہ 1: اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر واقع ہو تو اس طرح جو دو متصل زاویے بنتے ہیں ان کا مجموعہ دو قائمہ زاویے کے برابر ہوتا ہے۔



معلوم: AB ایک خط مستقیم ہے اور \vec{OC} اس خط پر نقطہ O پر واقع ہے۔

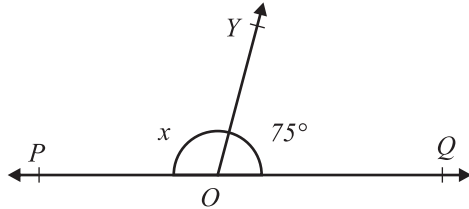
$$m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ \text{ مطلوب}$$

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle AOC + m\angle BOC = m\angle AOB$ ---- (i)	زاویوں کی جمع کا موضوع
$m\angle AOB = 180^\circ$ ---- (ii)	زاویہ مستقیم
$m\angle AOC + m\angle BOC = 180^\circ$	(i) اور (ii) سے

نتیجہ صریح: اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کریں تو اس طرح سے بننے والے چار زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ چار قائمہ زاویے کے برابر ہوتا ہے۔

مثال 1: درج ذیل شکل میں x کی قیمت معلوم کریں۔

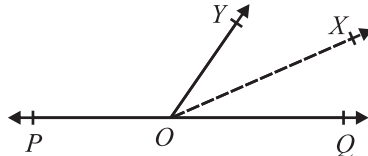


$$\text{حل: } m\angle POY + m\angle QOY = x + 75^\circ = 180^\circ \text{ (مسئلہ نمبر 1 کی رو سے)}$$

$$x = 180^\circ - 75^\circ$$

$$= 105^\circ$$

مسئلہ 2: اگر دو متصل زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویے ہوں تو ان کے بیرونی بازو ایک خط مستقیم میں ہوں گے۔



معلوم: $\angle POY$ اور $\angle QOY$ متصل زاویے ہیں۔

$$\text{نیز } m\angle POY + m\angle QOY = 180^\circ$$

مطلوب: \vec{OP} اور \vec{OQ} ایک ہی سیدھ میں ہیں۔ یعنی \vec{POQ} ایک خط مستقیم ہے۔

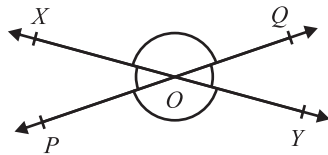
عمل: فرض کریں اگر \vec{OQ} اور \vec{OP} ایک سیدھ میں نہیں تو \vec{OX} لیں کہ \vec{OP} اور \vec{OX} ایک سیدھ میں ہوں یعنی \vec{POX} ایک خط مستقیم ہے۔
ثبوت:

بیانات	دلائل
\vec{POX} ایک خط مستقیم ہے اس لیے (i) $m \angle POY + m \angle YOX = 180^\circ$ ----- لیکن (ii) $m \angle POY + m \angle QOY = 180^\circ$ ----- یوں (iii) $m \angle POY + m \angle YOX = m \angle POY + m \angle QOY$ $m \angle YOX = m \angle QOY$ ----- یہ ناممکن ہے پس ہمارا عمل (مفروضہ) غلط ہوا (iv) ----- یوں \vec{POQ} ایک خط مستقیم ہے۔ اس طرح \vec{OQ} اور \vec{OP} ایک سیدھ میں ہوئے۔	عمل متصلہ سپلیمنٹری زاویے معلوم (i) اور (ii) سے دونوں طرف سے $m \angle POY$ تفریق کرنے سے کل جزو کے برابر نہیں ہوتا

نتیجہ صریح 1: اگر دو خطوط قطع کریں تو اس طرح بننے والے چار زاویوں کا مجموعہ چار قائمہ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح 2: اگر چند خطوط ایک دوسرے کو ایک ہی نقطہ پر قطع کریں تو اس طرح بننے والے تمام زاویوں کا مجموعہ چار قائمہ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ 3: اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کریں تو اسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔

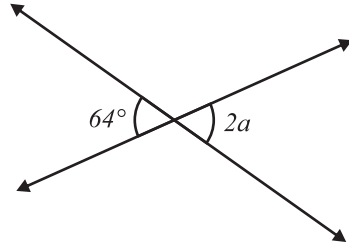


معلوم: \vec{PQ} اور \vec{XY} ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

مطلوب: $\angle XOQ \cong \angle YOP$
 $\angle YOQ \cong \angle XOP$

ثبوت:

بیانات	دلائل
(i) $m \angle XOQ + m \angle QOY = 180^\circ$ ----- (ii) $m \angle QOY + m \angle YOP = 180^\circ$ ----- $m \angle XOQ + m \angle QOY = m \angle QOY + m \angle YOP$ $m \angle XOQ = m \angle YOP$ پس $\angle XOQ \cong \angle YOP$ یعنی $\angle YOP \cong \angle XOP$ اسی طرح	\vec{XY} ایک خط مستقیم ہے۔ \vec{PQ} ایک خط مستقیم ہے۔ (i) اور (ii) سے دونوں اطراف سے $m \angle QOY$ تفریق کیا



مثال 2: دی ہوئی شکل میں a کی قیمت معلوم کریں۔

حل: (اسی متقابلہ زاویے) $2a = 64^\circ$

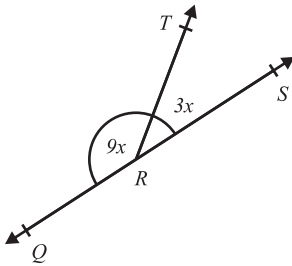
$$a = \frac{64^\circ}{2}$$

پس $a = 32^\circ$

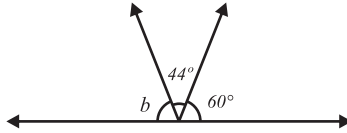
مشق 10.1

1- زاویوں کی مقداریں معلوم کریں جنہیں حروف تہجی سے ظاہر کیا گیا ہے۔

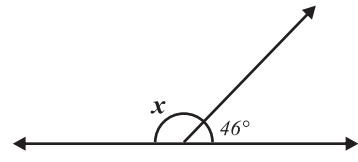
(iii)



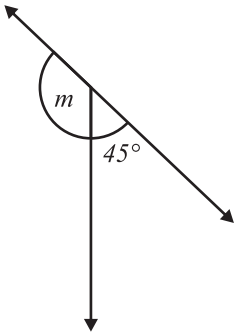
(ii)



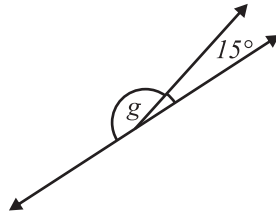
(i)



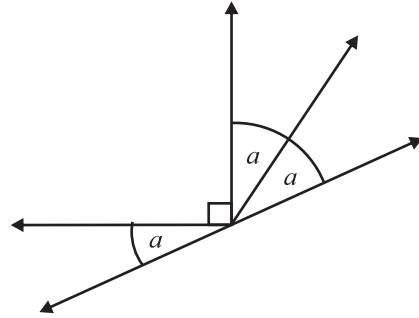
(vi)



(v)



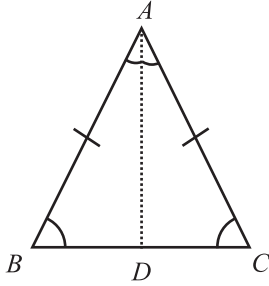
(iv)



2- اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم پر قائمہ زاویہ بنا رہا ہو تو ثابت کیجیے کہ دوسرا زاویہ بھی قائمہ زاویہ ہوگا۔

3- تین خطوط ایک ہی نقطہ میں سے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور 6 متماثل زاویے بناتے ہیں۔ ہر ایک زاویہ کی مقدار قائمہ زاویہ اور ڈگری میں معلوم کیجیے۔

مسئلہ 4: اگر ایک مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوں تو ان کے متقابلہ زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔



معلوم: $\triangle ABC$ میں $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

مطلوب: $\angle B \cong \angle C$

عمل: زاویہ A کا ناصف لیا جو \overline{BC} کو نقطہ D پر ملتا ہے۔

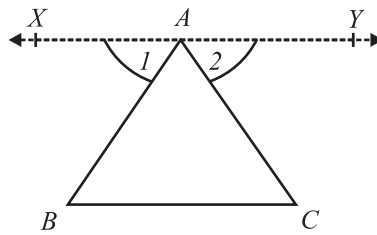
ثبوت:

بیانات	دلائل
$\triangle ABD \leftrightarrow \triangle ACD$	
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	معلوم
$\angle BAD \cong \angle CAD$	عمل
$\overline{AD} \cong \overline{AD}$	مشترک
$\triangle ABD \cong \triangle ACD$	ض-ز-ض \cong ض-ز-ض
$\angle B \cong \angle C$	پس یوں
	متماثل مثلثان کے متناظرہ زاویے

نتیجہ صریح: ایک مساوی الاضلاع مثلث کے تمام زاویے آپس میں متماثل ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح: مساوی الساقین مثلث کے زاویہ راس کا ناصف اُس کے قاعدہ کا عمودی ناصف ہوتا ہے۔

مسئلہ 5: مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔



معلوم: ABC ایک مثلث ہے۔

مطلوب: $m\angle BAC + m\angle B + m\angle C = m\angle 180^\circ$

عمل: نقطہ A میں سے گزرتا ہوا خط \overrightarrow{XAY} متوازی \overline{BC} لیں۔

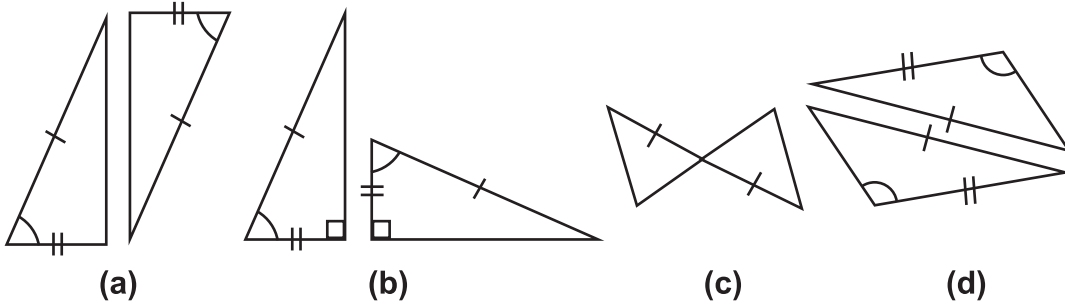
ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle B = m\angle 1$ ----- (i)	متبادلہ زاویے $(\vec{XY} \parallel BC)$
$m\angle C = m\angle 2$ ----- (ii)	متبادلہ زاویے $(\vec{XY} \parallel BC)$
$m\angle B + m\angle C = m\angle 1 + m\angle 2$	(i) اور (ii) کو جمع کرنے سے
$m\angle BAC + m\angle B + m\angle C = m\angle BAC + m\angle 1 + m\angle 2$	دونوں طرف $m\angle BAC$ جمع کیا
$m\angle BAC + m\angle B + m\angle C = (m\angle BAC + m\angle 1) + m\angle 2$	زاویوں کی جمع کا موضوع
$m\angle CAX + m\angle 2 = 180^\circ$	متصلہ سپلیمنٹری زاویے
$m\angle BAC + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ پس	

نتیجہ صریح: (i) مساوی الاضلاع مثلث کے ہر ایک زاویہ کی مقدار 60° ہوتی ہے۔
(ii) قائمہ الزاویہ مثلث میں دونوں حادہ زاویے کمپلیمنٹری ہوتے ہیں۔

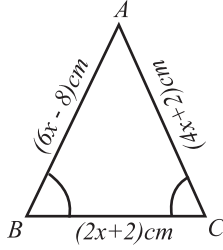
مشق 10.2

- 1- اگر $\Delta PQR \cong \Delta STU$ تو ان میں سے کون کون سے اضلاع اور زاویوں کی مقداروں کی پیمائشیں ایک جیسی ہیں؟
- 2- نیچے مثلثان کے جوڑے متماثل ہیں۔ کس مسئلہ کے اطلاق سے اشکال (a) سے (d) تک مثلثان متماثل ثابت کی جاسکتی ہیں؟



- 3- ایک متساوی الساقین مثلث میں قاعدہ پر زاویہ 45° کا ہے تو قاعدہ کے متقابلہ زاویہ کی مقدار کی پیمائش معلوم کیجیے۔

4- اگر دو زاویوں کے بازو آپس میں متوازی ہوں کہ وہ ایک ہی سمت میں ہوں یا مخالف سمت میں ہوں۔ تو ثابت کیجیے کہ وہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔



5- اضلاع کی لمبائیاں معلوم کریں۔ $m\angle B = m\angle C$

جائزہ مشق 10

1- ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے ہوئے ہیں۔ ان میں سے درست جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) ریاضی کی شاخ جس میں جیومیٹری کے اثباتی مسائل کو منطقی دلائل سے ثابت کیا جاتا ہے وہ کیا کہلاتی ہے؟

- (a) الجبرا (b) سیٹ تھیوری
(c) لوگارٹھم (d) اثباتی جیومیٹری

(ii) ایسے بیانات جنہیں بغیر ثبوت کے درست تسلیم کر لیا جاتا ہے کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) بنیادی مفروضے (b) اثباتی مسائل
(c) نتائج صریح (d) مسائل

(iii) ایک ایسا ابتدائی بیان ہے۔ جسے ہم فرض کر لیتے ہیں اور اس کے ثبوت کی ضرورت نہیں ہوتی۔ اس کو کیا کہا جاتا ہے؟

- (a) اصول موضوعہ (b) اثباتی مسئلہ
(c) نتیجہ صریح (d) مطلوب

(iv) ایک ایسی سچائی جس کو ثبوت کی ضرورت نہیں ہوتی اور اسے ہمیشہ درست تسلیم کر لیا جاتا ہے۔ اس کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) نتیجہ صریح (b) اثباتی مسئلہ
(c) مسائل (d) اصول متعارفہ

(v) استدلال کا آغاز کس سے کیا جاتا ہے؟

- (a) بنیادی مفروضوں (b) اثباتی مسائل
(c) نتائج صریح (d) اصول متعارفہ

(vi) ایک دعویٰ جسے بغیر ثبوت کے درست تسلیم کیا جاتا ہے اس کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) بنیادی مفروضہ (b) اثباتی مسائل
(c) نتیجہ صریح (d) مسائل

(vii) ایک تجویز جسے ثبوت کے بغیر درست مان لیا جاتا ہے اور جس کا تعلق کسی خاص استفساری انداز کی کسی خاص قسم سے ہو کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) بنیادی مفروضے (b) اثباتی مسائل
(c) نتائج صریح (d) اصول موضوعات

(viii) ایسے حقائق جن کا پہلے سے علم ہو یا جنہیں فرض کر لیا جائے اس کو کیا کہتے ہیں؟

- (a) مقدمات (b) اثباتی مسائل
(c) نتائج صریح (d) بنیادی مفروضے

(ix) ایک ایسا بیان جسے حسابی عوامل اور دلائل کی مدد سے درست ثابت کیا جاتا ہے کیا کہلاتا ہے؟

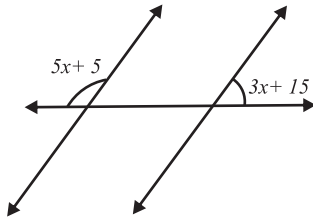
- (a) بنیادی مفروضہ (b) اثباتی مسئلہ
(c) نتیجہ صریح (d) مسائل

(x) ایسا اصول جسے اثباتی مسئلہ کی بنیاد پر حاصل کیا جاتا ہے کیا کہلاتا ہے؟

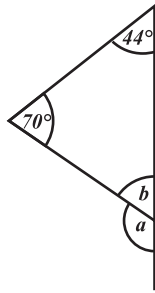
- (a) بنیادی مفروضہ (b) مسئلہ
(c) نتیجہ صریح (d) عالمگیر سچائی

-2 حروف سے ظاہر کیے گئے زاویوں کی مقدار میں معلوم کریں۔

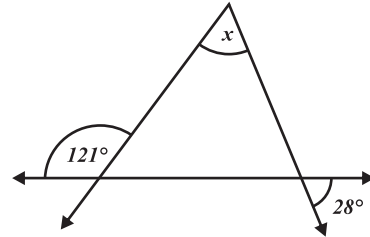
(i)



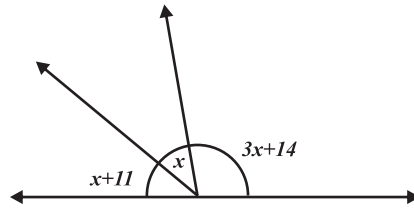
(iii)



(ii)



(iv)



-3 ثابت کیجیے۔

(i) اگر دو خطوط مستقیم ایک دوسرے کو اس طرح قطع کریں کہ چار متماثل زاویے بنیں تو ہر زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

(ii) مساوی الساقین مثلث کے نقطہ راس سے عمود قاعدہ کی تنصیف کرتا ہے۔

خلاصہ

- اثباتی جیومیٹری میں ہندسی اشکال کی مدد سے ریاضیاتی بیانات کی سچائی ثابت کی جاتی ہے۔
- اثباتی جیومیٹری ریاضی کی ایک ایسی شاخ ہے جس میں جیومیٹری کے مسائل کو منطقی استدلال سے ثابت کیا جاتا ہے۔
- ایسے بیانات کو جو بغیر ثبوت کے درست تسلیم کر لیے جاتے ہیں بنیادی مفروضے کہلاتے ہیں۔
- اصول متعارفہ کی سچائی واضح ہوتی ہے اور انہیں بغیر ثبوت کے درست تسلیم کر لیا جاتا ہے۔
- ایسا مفروضہ جس کا تعلق ریاضی کی متعلقہ شاخ سے ہو اور بغیر ثبوت کے درست تسلیم کیا جائے اصول موضوعہ کہلاتا ہے۔
- مسئلہ (proposition) ایک دعویٰ ہوتا ہے۔ جو درست یا غلط بھی ہو سکتا ہے۔
- بیان مسئلہ جیومیٹری کی سچائی کے متعلق ہوتا ہے۔ جسے ہم ثابت کرنے والے ہوتے ہیں۔
- معلوم: آسانی اور وضاحت کے لیے سب سے پہلے ہم اُس کو لکھ لیتے ہیں جو کچھ دیا ہوا ہوتا ہے یا جو کچھ فرض کر لیا گیا ہوتا ہے۔
- مطلوب: بیان مسئلہ میں ایک حصہ کو ثابت کرنا ہوتا ہے اُسے مطلوب کہتے ہیں۔
- عمل: مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے شکل میں مناسب اضافہ کیا جاتا ہے اسے عمل کہتے ہیں۔
- اثباتی مسئلہ: ایک ایسا بیان جس کی سچائی استدلال سے ثابت کی جاتی ہے کو اثباتی مسئلہ کہتے ہیں۔
- نتیجہ صریح: ایسے نتائج جو ہندسی مسائل سے اخذ کئے جائیں نتائج صریح کہلاتے ہیں۔
- اگر ایک خطِ مستقیم دوسرے خطِ مستقیم پر واقع ہو تو اس طرح سے جو دو متصل زاویے بنتے ہیں۔ اُن کا مجموعہ دو قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔
- اگر کسی مسئلہ کے معلوم کو مطلوب اور مطلوب کو معلوم میں بدل دیا جائے تو نئے مسئلہ کو پہلے مسئلہ کا عکس مسئلہ کہتے ہیں۔
- مثلاً مسئلہ فیثاغورث کا عکس مسئلہ یہ ہے کہ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کے مربع کے برابر ہو تو مثلث قائمہ الزاویہ ہوگی۔
- اگر دو متصل زاویوں کا مجموعہ دو قائمہ زاویہ ہوں۔ تو اُن کے بیرونی بازو ایک ہی خطِ مستقیم میں ہوں گے۔
- اگر دو خطوط ایک دوسرے کو قطع کریں تو راسی متقابلہ زاویے متماثل ہوتے ہیں۔
- اگر ایک مثلث کے دو اضلاع متماثل ہوں تو اُن کے متقابلہ زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔
- مثلث کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔