یونٹ-11 ◀ تکونیات کا تعارف (Introduction to Trigonometry)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ :

- تکونیات کی تعریف کر سکیں۔
- کسی حادہ زاویہ کی تکونیاتی نسبتوں کی تعریف کر سکیں۔
- °30، °60 اور °45 کے زاویوں کی تکونیاتی نسبتیں معلوم کر سکیں۔

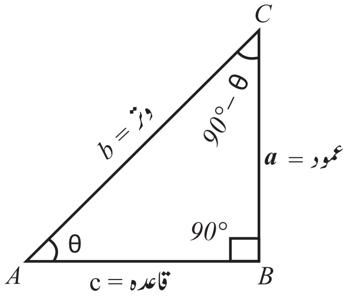
تکونیات (Trigonometry)

11.1 تعارف (Introduction)

لفظ ٹرگنومیٹری یونانی (Greek) زبان سے اخذ کیا گیا ہے جس سے مراد مثلث کی پیمائش ہے۔ یہ ریاضی کی ایک اہم شاخ ہے جو مثلثوں کے حل سے متعلق ہے۔ مثلثوں کے حل سے مراد مثلث کے اضلاع اور زاویوں کو معلوم کرنا ہے تکونیات کی ترقی میں مسلمان ریاضی دانوں خاص طور پر ابو عبداللہ البطانی، البیرونی اور محمد بن موسیٰ الخوارزمی کے نام قابل ذکر ہیں۔

تکونیات کا کاروبار، انجینئرنگ، سروے، جہاز رانی، اجرام فلکی کے علم، طبعی اور سماجی علوم میں بہت اہم کردار ہے۔

11.2 حادہ زاویہ کی تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ratios of an Acute Angle)



ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں (تھیٹا) $\angle CAB = \theta$ اور $m\angle ABC = 90°$ ہے $90°$ کے سامنے والے ضلع کو ہمیشہ وتر کہتے ہیں۔

زاویہ θ کے سامنے والے ضلع کو عمود کہتے ہیں اور دیے ہوئے زاویہ θ اور $90°$ کے درمیان والے ضلع کو قاعدہ کہتے ہیں۔

دی ہوئی قائمۃ الزاویہ مثلث ABC کے لیے θ کے لحاظ سے نسبتوں کی یوں تعریف کی جاتی ہے۔

$$\frac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \frac{a}{b} = \text{sine}\,\theta = \sin\theta$$

$$\frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \frac{c}{b} = \text{cosine}\,\theta = \cos\theta$$

$$\frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \frac{a}{c} = \text{tangent}\,\theta = \tan\theta$$

اِن نسبتوں کی معکوس:

$$\frac{\text{وتر}}{\text{عمود}} = \frac{b}{a} = \text{cosecant } \theta = \text{cosec } \theta$$

$$\frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}} = \frac{b}{c} = \text{secant } \theta = \sec \theta$$

$$\frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}} = \frac{c}{a} = \text{cotagent } \theta = \cot \theta$$

کیا آپ جانتے ہیں؟

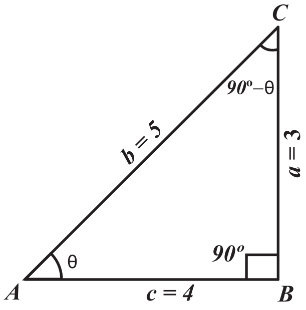
(i) $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

(ii) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

(iii) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

(iv) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

مثال 1: دی ہوئی مثلث ABC میں $m\angle A = \theta$، اضلاع a ، b اور c کی پیمائشیں شکل میں دی گئی ہیں۔ تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کریں۔



حل:

$\sin\theta = \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, $\text{cosec}\,\theta = \frac{b}{a} = \frac{5}{3}$

$\cos\theta = \frac{c}{b} = \frac{4}{5}$, $\sec\theta = \frac{d}{c} = \frac{5}{4}$

$\tan\theta = \frac{a}{c} = \frac{3}{4}$, $\cot\theta = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$

مثال 2: اوپر والی مثال کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں استعمال کر کے پڑتال کریں کہ:

i. $\sin\theta \times \text{cosec}\,\theta = 1$ **ii.** $\tan\theta \times \cot\theta = 1$ **iii.** $\cos\theta \times \sec\theta = 1$

حل:

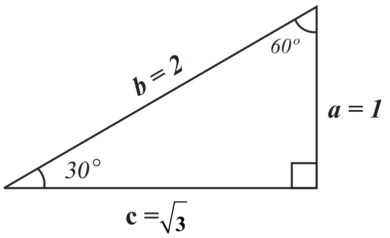
i. $\text{L.H.S} = \sin\theta \times \text{cosec}\,\theta = \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1 = \text{R.H.S}$

ii. $\text{L.H.S} = \tan\theta \times \cot\theta = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1 = \text{R.H.S}$

iii. $\text{L.H.S} = \cos\theta \times \sec\theta = \frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1 = \text{R.H.S}$

11.2.1 حادہ زاویوں 30°، 60° اور 45° کی تکونیاتی نسبتیں

- 30° زاویہ کی تکونیاتی نسبتیں:



دی ہوئی قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle B = 90^\circ$ اور $m\angle BAC = 30^\circ$ ۔ بنیادی جیومیٹری سے ہم جانتے ہیں کہ قائمۃ الزاویہ مثلث میں ہمیشہ 30° کے زاویے کے سامنے والے ضلع کی لمبائی وتر کی لمبائی سے نصف ہوتی ہے۔ اگر $a = 1$ ہو تو $b = 2$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے $|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2$

$|\overline{AB}|^2 + (1)^2 = (2)^2$ (قیمتیں درج کرنے سے)

$|\overline{AB}|^2 = 4 - 1 = 3$

$|\overline{AB}| = \sqrt{3}$

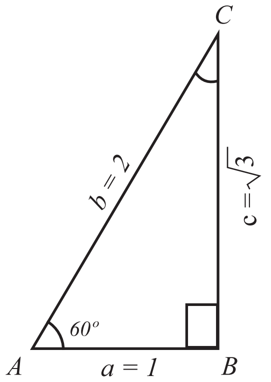
30° زاویہ کی تکونیاتی نسبتیں ہوں گی:

$$\sin 30^\circ = \frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AC}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

- 60° زاویہ کی تکونیاتی نسبتیں:



دی ہوئی قائمۃ الزاویہ مثلث میں $m\angle B = 90^\circ$، $m\angle BAC = 60^\circ$ اور $m\angle ACB = 30^\circ$ ہیں ہے۔ بنیادی جیومیٹری سے ہم جانتے ہیں کہ ضلع $\overline{AB}$ کی لمبائی وتر کی لمبائی سے نصف ہے اگر $m\overline{AB} = 1$ تو $m\overline{AC} = 2$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے $|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2$

$(1)^2 + |\overline{BC}|^2 = (2)^2$ (قیمتیں درج کرنے سے)

$$|\overline{BC}|^2 = 4 - 1 = 3$$

$$|\overline{BC}| =$$

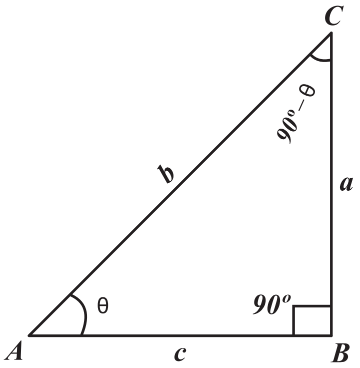
60° زاویہ کی تکونیاتی نسبتیں ہوں گی:

$$\sin 60^o = \frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cosec} 60^o = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^o = \frac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{AC}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sec 60^o = 2$$

$$\tan 60^o = \frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AB}} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \cot 60^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- 45° زاویہ کی تکونیاتی نسبتیں:



دی ہوئی قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle B = 90^o$ اور $m\angle A = \theta = 45^o$ چونکہ $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^o$، اس لیے $m\angle A = m\angle C = 45^o$

∴ مثلث ABC ایک متساوی الساقین مثلث ہے پھر بنیادی جیومیٹری سے $a = c = 1$

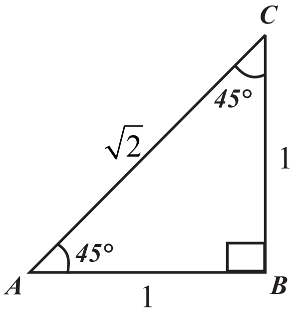
$$\Rightarrow \quad b^2 = a^2 + c^2$$

$$= 1 + 1$$

$$b^2 = 2$$

$$\Rightarrow \quad b = \sqrt{2}$$

اس لیے 45° کی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں ہوں گی:



$$\sin 45^o = \frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \operatorname{cosec} 45^o = \frac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{BC}} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{AC}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \sec 45^o = \frac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{AB}} = \sqrt{2}$$

$$\tan 45^o = \frac{m\,\overline{BC}}{m\,\overline{AB}} = 1 \quad ; \quad \cot 45^o = \frac{m\,\overline{AB}}{m\,\overline{BC}} = 1$$

30°، 45° اور 60° کے زاویوں کی تکونیاتی نسبتیں نیچے ایک ٹیبل میں دی گئی ہیں:

زاویہ → / نسبت ↓	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

مثال 3: مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

i. $\sin 45^\circ \times \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \times \sin 30^\circ$

ii. $\sin 60^\circ \times \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \times \sin 30^\circ$

iii. $\sin 60^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \times \sin 45^\circ$

iv. $\cos 45^\circ \times \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \times \sin 30^\circ$

حل:

i. $\sin 45^\circ \times \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \times \sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

ii. $\sin 60^\circ \times \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \times \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

iii. $\sin 60^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \times \sin 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

iv. $\cos 45^\circ \times \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \times \sin 30^\circ$

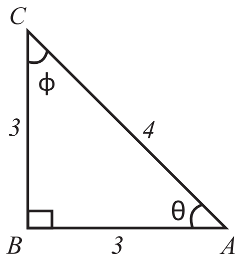
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

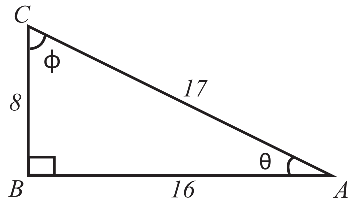
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

مشق 11.1

-1 مندرجہ ذیل قائمۃ الزاویہ مثلثوں کے لیے تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔



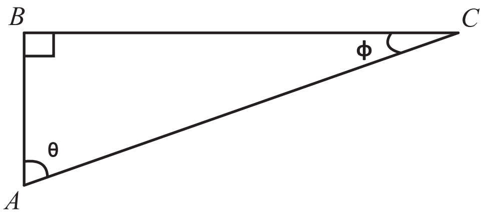
(a)



(b)

(i)	$\sin\theta$	**(ii)**	$\cos\theta$	**(iii)**	$\tan\theta$	**(iv)**	$\sec\theta$	**(v)**	$\text{cosec}\,\theta$
(vi)	$\cot\theta$	**(vii)**	$\tan\theta$	**(viii)**	$\sin\theta$	**(ix)**	$\sec\theta$	**(x)**	$\cos\theta$

-2 نیچے دی گئی مثلث ABC کی تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔



(i)	$\sin m\angle A$	**(ii)**	$\cos m\angle A$	**(iii)**	$\tan m\angle A$
(iv)	$\sin m\angle C$	**(v)**	$\cos m\angle C$	**(vi)**	$\tan m\angle C$

-3 اگر ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle B = 90^\circ$ ، $m\angle C = 60^\circ$ اور $\sin m\angle C = \frac{c}{b}$ تو مندرجہ ذیل تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔

(i)	$m\overline{BC}/m\overline{AB}$	**(ii)**	$\cos 60^\circ$	**(iii)**	$\tan 60^\circ$	**(iv)**	$\sec 60^\circ$
(v)	$\text{cosec}\ 60^\circ$	**(vi)**	$\cot 60^\circ$	**(vii)**	$\sin 30^\circ$	**(viii)**	$\cos 30^\circ$
(ix)	$\tan 30^\circ$	**(x)**	$\sec 30^\circ$	**(xi)**	$\text{cosec}\ 30^\circ$	**(xii)**	$\cot 30^\circ$

-4 مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $2\sin 60^\circ \cos 60^\circ$ **(ii)** $2\sin 45^\circ + 2\cos 45^\circ$

(iii) $\cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ$ **(iv)** $\cos 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \sin 30^\circ$

جائزہ مشق 11

-1 ہر بیان کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) $\sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos$?

(a) 90° **(b)** 60° **(c)** 30° **(d)** 0°

(ii) $\tan 60^\circ = \tan(90^\circ - 30^\circ) = \cot$?

(a) 90° **(b)** 30° **(c)** 60° **(d)** 0°

(iii) $\sin\theta$ کا معکوس کیا ہے؟

(a) $\operatorname{cosec}\theta$ **(b)** $\sec\theta$ **(c)** $\cot\theta$ **(d)** $\tan\theta$

(iv) $\cos\theta$ کا معکوس کیا ہے؟

(a) $\operatorname{cosec}\theta$ **(b)** $\sec\theta$ **(c)** $\cot\theta$ **(d)** $\tan\theta$

(v) $\tan\theta$ کا معکوس کیا ہے؟

(a) $\operatorname{cosec}\theta$ **(b)** $\sec\theta$ **(c)** $\cot\theta$ **(d)** $\tan\theta$

(vi) $\sin 30^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟

(a) 1 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(d)** 0

(vii) $\cos 60^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟

(a) 1 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(d)** 0

(viii) $\sin 60^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟

(a) 1 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(d)** 0

(ix) $\sin 90^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟

(a) 1 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(d)** 0

(x) $\tan 45^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟

(a) 1 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(d)** 0

(xi) $\cos 45^\circ$ کی قیمت کیا ہے؟

(a) 1 **(b)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(d)** 0

-2 قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $2 \sin 45^o + \cos 45^o$ **(ii)** $2 \cos 30^o \sin 30$

(iii) $2 \sin 45^o + 2 \cos 45^o$ **(iv)** $\tan 45^o \cos 45^o$

-3 اگر $\sin 45^o$ اور $\cos 45^o$ میں ہر ایک کی قیمت $\frac{1}{\sqrt{2}}$، تو مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $\sin 45^o + \cos 45^o$ **(ii)** $3\cos 45^o + 4\sin 45^o$

(iii) $5\cos 45^o - 3\sin 45^o$

خلاصہ

- ٹرگنومیٹری تین الفاظ سے ماخذ ہے۔(تین)Trei، (زاویے)Goni اور پیمائش (Metron)۔
- تکونیات مثلث کے عناصر کے تعلق کو واضح کرتی ہے۔اور مثلث کے مختلف عناصر کو معلوم کرنے کے طریقوں پر مشتمل ہے۔
- تکونیات میں تین بہت عام تکونیاتی نسبتیں sine،cosine اور tangent ہیں۔تکونیاتی نسبتیں صرف مثلث کے ایک ضلع سے دوسرے ضلع کی تقسیم ہے۔
- تکونیاتی نسبتیں استعمال کی جاتی ہیں قائمۃ الزاویہ مثلث کے زاویوں کا اس کے اضلاع کی لمبائیوں سے تعلق ہے۔
- $\sin\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$
- $\cos\theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$
- $\tan\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}} = \frac{a}{b}$