یونٹ-5

کثیر رقمی جملے (Polynomials)

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ :

- مستقل، متغیر، حرفی اور الجبری جملہ کو ذہن میں لا سکیں۔
- تعریف کر سکیں:
  - کثیر رقمی
  - کثیر رقمی کا درجہ
  - کثیر رقمی کا عددی سر
- ایک، دو اور دو سے زیادہ متغیرات میں کثیر رقمی کی پہچان کر سکیں۔
- پہلے، دوسرے، تیسرے اور چوتھے درجے کی کثیر رقمی کی پہچان کر سکیں۔
- کثیر رقمیوں کی جمع، تفریق اور ضرب کے عوامل کر سکیں۔
- کسی کثیر رقمی کو پہلے درجے کی کثیر رقمی سے تقسیم کر سکیں۔

الجبرا کو مسلمان ریاضی دان الخوارزمی (780-850) نے متعارف کروایا۔ اُسے جدید الجبرا کا بانی بھی کہا جاتا ہے۔

5.1 الجبری جملے (Algebraic Expressions)

ایسا جملہ جو الجبری عوامل (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، جذر) کے ذریعے متغیرات اور مستقلات کو ملائے الجبری جملہ کہلاتا ہے۔ الجبرا کلیات بنانے میں مدد کرتا ہے۔ اس لیے کہ اس کا تعلق حساب سے ہوتا ہے مثلاً $x^2 + 2x + 1$ اور $\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ جبکہ $x \neq 0$ الجبری جملے ہیں۔

5.1.1 مستقل، متغیر، حرفی مقدار اور الجبری جملہ کی پہچان

- **مستقل (Constant)**

علامت جس کی ایک مقررہ عددی قیمت ہو مستقل کہلاتی ہے۔ مثلاً $5x + 7$ میں 7 ایک مستقل مقدار ہے۔

- **متغیر (Variable)**

ایسی علامت جس کی قیمت تغیر پذیر ہو یعنی وہ مختلف عددی قیمتیں اختیار کر سکے متغیر کہلاتی ہے انہیں نامعلوم بھی کہتے ہیں۔ مثلاً $x^2 + y + 3z$ میں x، y اور z متغیرات ہیں۔

- **حرفی مقدار (Literal)**

ایسے حروفِ تہجی کو جو مستقل مقداروں کو یا عددی سروں کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال ہوں حرفی مقداریں کہتے ہیں۔ مثلاً $ax^2 + bx + c$ میں a، b اور c حرفی مقداریں ہیں جب کہ x ایک متغیر ہے۔

- **الجبری جملہ (Algebraic Expression)**

ایسا جملہ جو الجبری عوامل جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے ذریعے متغیرات اور مستقلات کو ملائے الجبری جملہ کہلاتا ہے۔

چند ایک الجبری جملے نیچے دیے جاتے ہیں۔

(i) 14 **(ii)** $x + 2y$ **(iii)** $4x - y + 5$ **(iv)** $\dfrac{-2}{x} + y$ **(v)** $3y + 7z - \dfrac{5}{7}$

5.2 کثیر رقمی (Polynomial)

5.2.1 تعریفیں

- **کثیر رقمی**

کثیر رقمی جملہ یا کثیر رقمی ایک ایسا الجبری جملہ ہوتا ہے جس میں ایک یا ایک سے زیادہ رقوم ہو سکتی ہیں اور متغیرات میں سے ہر ایک کا قوت نما صفر یا مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔ مثلاً 13، $-x$، $5x + 3y$، $x^2 - 3x + 1$ کثیر رقمیاں ہیں جبکہ درج ذیل کثیر رقمیاں نہیں ہیں۔

$$x^{-2}, \quad \frac{1}{y}, \quad x^3 - x^{-3} + 3, \quad x^2 + y^{-4} - 7, \quad \frac{x}{y} + 5x$$

- **کثیر رقمی کا درجہ**

کثیر رقمی کا وہی درجہ ہوتا ہے جو اس میں موجود رقوم میں بڑے درجے کی ہوتی ہے۔ اگر کسی رقم میں ایک سے زیادہ متغیرات ہوں تو اُن کے قوت نماؤں کو جمع کر کے اُس کا درجہ معلوم کیا جاتا ہے۔ مثلاً $2x^3y^4$ کا درجہ $3 + 4 = 7$ ہے۔

- **کثیر رقمی کا عددی سر**

اگر کسی متغیر کو مستقل مقدار (Constant) سے ضرب دی جائے تو یہ مستقل مقدار متغیر کا عددی سر (Coefficient) کہلاتی ہے۔ $4x + 6y$ میں x کا عددی سر 4 اور y کا عددی سر 6 ہے۔

5.2.2 ایک، دو اور دو سے زیادہ متغیرات میں کثیر رقمی کی پہچان

(a) ایک متغیر میں کثیر رقمیاں

درج ذیل کثیر رقمیوں پر غور کریں۔

(i) $x^4 + 4$ **(ii)** $x^2 - x + 1$ **(iii)** $y^3 + y^2 - y + 1$ **(iv)** $y^2 - y + 8$

کثیر رقمیوں (i)، (ii) میں x اور (iii)، (iv) میں y متغیرات ہیں۔ یہ تمام کثیر رقمیاں ایک متغیر میں کثیر رقمیاں ہیں۔

(b) دو متغیرات میں کثیر رقمیاں

درج ذیل کثیر رقمیوں پر غور کریں۔

(i) $x^2 + y + 2$ **(ii)** $x^2y + xy + 6$ **(iii)** $x^2z + xz + z$ **(iv)** $x^2z + 8$

کثیر رقمیوں (i)، (ii) میں x، y اور (iii)، (iv) میں x، z متغیرات ہیں۔ یہ تمام کثیر رقمیاں دو متغیرات میں کثیر رقمیاں ہیں۔

(c) زیادہ متغیرات میں کثیر رقمیاں

اسی طرح کثیر رقمی $x^2yz + xy^2z + xy + 7$ تین متغیرات x، y اور z میں کثیر رقمی ہے۔

5.2.3 مختلف درجات کی کثیر رقمیوں کی پہچان یعنی یک درجی، دو درجی، سہ درجی اور چہار درجی کثیر رقمیوں کی پہچان

- **یک درجی کثیر رقمی (Linear Polynomial)**

درج ذیل کثیر رقمیوں پر غور کریں۔

(i) $x + 2$ **(ii)** x **(iii)** $x + 2y$ **(iv)** $x + z$

اِن تمام کثیر رقمیوں میں متغیرات کا درجہ ایک ہے یہ تمام یک درجی کثیر رقمیاں ہیں۔

- **دو درجی کثیر رقمی (Quadratic Polynomial)**

درج ذیل کثیر رقمیوں پر غور کریں۔

(i) x^2 **(ii)** $x^2 - 3$ **(iii)** $xy + 1$

پہلی دو کثیر رقمیوں میں x متغیر ہے اور اُس کا درجہ 2 ہے۔ تیسری کثیر رقمی میں x، y متغیرات ہیں اور اُن کے قوت نماؤں کا مجموعہ $1 + 1 = 2$ ہے اس کا درجہ بھی 2 ہے۔ لہٰذا (i)، (ii) اور (iii) کثیر رقمیاں دو درجی ہیں۔

- سہ درجی کثیر رقمی (Cubic Polynomial)

درج ذیل کثیر رقمیوں پر غور کریں۔

(i) $5x^3 + x^2 - 4x + 1$ **(ii)** $x^2y + xy^2 + y - 2$

اِن میں سے ہر ایک کثیر رقمی کا درجہ 3 ہے۔ یہ دونوں سہ درجی کثیر رقمیاں ہیں۔

- چہار درجی کثیر رقمی (Biquadratic Polynomial)

آیئے چند چہار درجی کثیر رقمیاں لیتے ہیں۔

(i) $x^4 + x^3y + x^2y^2 + y^3 - 1$ **(ii)** $y^4 + y^3 - y^2 - y + 8$

اِن دونوں کثیر رقمیوں کا درجہ 4 ہے۔

مشق 5.1

-1 جملوں میں دیے گئے مستقلات لکھیں۔

(i) $3x + 4$ **(ii)** $2x^3 - 1$ **(iii)** $5y + 2x$ **(iv)** $7y^2 - 8$

-2 مساواتوں میں دیے گئے متغیرات لکھیں۔

(i) $2x - 1 = 0$ **(ii)** $y + x = 3$
(iii) $x^2 - x - 1 = 0$ **(iv)** $7y^2 - 2y + 3 = 0$

-3 مساواتوں میں لکھی گئی حرفی مقداروں کے نام لکھیں۔

(i) $ax^2 + bx + c - y = 0$ **(ii)** $cx^2 + dx = 0$
(iii) $bx + d = 0$ **(iv)** $ay^2 + d = 0$

-4 کثیر رقمیوں اور ایسے جملوں کو علیحدہ کریں جو کثیر رقمیاں نہیں ہیں۔

(i) $x^2 + x - 1$ **(ii)** $x^2y + xy^2 + 7$
(iii) $x^{-2} + y + 7$ **(iv)** $\frac{x}{y^2} + 1 - \frac{y^2}{x}$
(v) $x^3 - x^2 + y - 1$ **(vi)** $x^4 + x^2 + 5x + \frac{1}{2}$

-5 درج ذیل جملوں میں کون کون سے مستقلات دیے گئے ہیں؟

(i) $7x - 6y + 3z$ **(ii)** $5x^2 - 3$
(iii) $8x^2 + 2y + 5$ **(iv)** $9y + 3x - 2z$

-6 نیچے دی گئی کثیر رقمیوں میں سے ہر ایک کا درجہ لکھیں۔

(i) $x + 1$ **(ii)** $x^2 + x$
(iii) $x^3 - xy + 1$ **(iv)** $x^2y^2 + x^3 + y^2 - 1$

-7 یک درجی، دو درجی، سہ درجی اور چہار درجی کثیر رقمیوں کو علیحدہ علیحدہ کریں۔

(i) $3x + 1$ **(ii)** $x^2 - 2$ **(iii)** $y^2 - y$
(iv) $x + y$ **(v)** $x^3 + x^2 - 2$ **(vi)** $x^4 + x^3 + x^2$
(vii) $x^2y^2 + xy$ **(viii)** $x^2 + xy + 8$

5.3 کثیر رقمیوں پر عوامل (Operations on Polynomials)

5.3.1 کثیر رقمی جملوں کی جمع، تفریق اور ضرب

(i) کثیر رقمیوں کی جمع (Addition of Polynomials)

اگر $P(x)$ اور $Q(x)$ دو کثیر رقمیاں ہوں تو اُن کے مجموعہ کو $P(x) + Q(x)$ لکھا جاتا ہے۔ دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمی جملوں کو جمع کرنا مقصود ہو تو اُنھیں متعلقہ متغیرات کے لحاظ سے ترتیب نزولی یا ترتیب صعودی میں لکھا جاتا ہے اور ایک جیسے متغیرات کو ایک دوسرے کے نیچے لکھا جاتا ہے۔ اس طرح ایک جیسی رقوم کو جمع کر لیا جاتا ہے

مثال 1: $3x^3 + 5x^2 - 4x$ ، $x^3 - 6 + 3x^2$ اور $6 - x^2 - x$ کو جمع کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 5x^2 - 4x + 0 \\ x^3 + 3x^2 + 0x - 6 \\ 0x^3 - x^2 - x + 6 \\ \hline 4x^3 + 7x^2 - 5x \\ \hline \end{array}$$

حاصل جمع : $4x^3 + 7x^2 - 5x$

(ii) کثیر رقمیوں کی تفریق (Subtraction of Polynomials)

اگر P اور Q دو کثیر رقمیاں ہوں تو اُن کے فرق کو $P - Q$ یا $[P + (-Q)]$ لکھا جاتا ہے اگر دو کثیر رقمیوں کا مجموعہ صفر ہو تو ایک کثیر رقمی کو دوسری کثیر رقمی کی جمعی معکوس کہا جاتا ہے۔ اگر $P = x + y$ اور $Q = -x - y$ ہو تو $P + Q = (x + y) + (-x - y) = 0$ تفریق میں بھی کثیر رقمیوں کو ترتیب نزولی یا ترتیب صعودی میں لکھا جاتا ہے۔ جس کثیر رقمی کو تفریق کرنا ہوتا ہے اُس کی رقوم کی علامات کو بدل دیا جاتا ہے اور پھر جمع کا عمل کیا جاتا ہے۔

مثال 2: $x - 8 + 4x^2 - 2x^3$ کو $9 - 3x^2 + x + 5x^4$ میں سے تفریق کریں۔

حل: دونوں کثیر رقمیوں کی رقوم کو ترتیب نزولی میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 9 \\ \pm 0x^4 \pm 2x^3 \mp 4x^2 \mp x \pm 8 \\ \hline 5x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 17 \\ \hline \end{array}$$

فرق : $5x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 17$

(iii) کثیر رقمیوں کی ضرب (Multiplication of Polynomials)

کثیر رقمیوں کی آپس میں ضرب کو مثالوں کی مدد سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثال 3: $4x^2$ اور $5x^3$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل:

$(4x^2)(5x^3) = 4 \times 5(x^2 \times x^3)$ (اصول تلازم)

$= (20)(x^2 \times x^3)$

$= 20x^{2+3}$ (قوت نماؤں کا قانون)

$= 20x^5$

مثال4: $3x^2 + 2x - 4$ اور $5x^2 - 3x + 3$ کا حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل: افقی طریقہ (Horizontal Method)

$$(3x^2 + 2x - 4)(5x^2 - 3x + 3)$$
$$= 3x^2(5x^2 - 3x + 3) + 2x(5x^2 - 3x + 3) - 4(5x^2 - 3x + 3)$$
$$= 15x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 10x^3 - 6x^2 + 6x - 20x^2 + 12x - 12$$
$$= 15x^4 + (10 - 9)x^3 + (9 - 6 - 20)x^2 + (6 + 12)x - 12$$
$$= 15x^4 + x^3 - 17x^2 + 18x - 12$$

مثال5: $2x - 3$ کو $5x + 6$ سے ضرب دیں۔

حل: عمودی طریقہ (Vertical Method)

$$\begin{array}{r} 5x + 6 \\ \times\ 2x - 3 \\ \hline 10x^2 + 12x \\ -15x - 18 \\ \hline 10x^2 - 3x - 18 \\ \hline \end{array}$$

نوٹ: دو کثیر رقمیوں کا حاصل ضرب بھی ایک کثیر رقمی ہوتی ہے اور اس کا درجہ دونوں کثیر رقمیوں کے درجہ کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

5.3.2 کثیر رقمیوں کی تقسیم (Division of Polynomials)

تقسیم، ضرب کا معکوس عمل ہوتا ہے۔ کثیر رقمیوں کی تقسیم مثالوں کی مدد سے واضح کی جاتی ہے۔

مثال6: $(-8x^5)$ کو $(-4x^3)$ سے تقسیم کریں۔

حل:
$$(-8x^5) \div (-4x^3) = (-8x^5) \times \frac{1}{-4x^3}$$
$$= 2x^{5-3}$$
$$= 2x^2$$

مثال7: $x^3 - 2x + 4$ کو $x + 2$ پر تقسیم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 2x + 2 \\ \hline x + 2 & x^3 + 0x^2 - 2x + 4 \\ & \pm x^3 \pm 2x^2 \\ \hline & -2x^2 - 2x \\ & \mp 2x^2 \mp 4x \\ \hline & 2x + 4 \\ & \pm 2x \pm 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

نوٹ: اگر ایک کثیر رقمی دوسری کثیر رقمی کو پورا پورا تقسیم کرے تو باقی صفر حاصل ہوتا ہے۔

مشق 5.2

-1 جمع کیجیے۔

(i) $1 + 2x + 3x^2, 3x - 4 - 2x^2, x^2 - 5x + 4$

(ii) $a^3 + 2a^2 - 6a + 7, a^3 + 2a + 5, 2a^3 + 2a - a^2 - 8$

(iii) $a^3 - 2a^2b + b^3, 4a^3 + 2ab^2 + 6a^2b, 2b^3 - 5a^3 - 4a^2b$

-2 Q میں سے P تفریق کریں۔

(i) $P = 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x$; $Q = 4x^4 + 2x^2 + x^3 - x + 1$

(ii) $P = 2x + 3y - 4z - 1$; $Q = 2y + 3x - 4z + 1$

(iii) $P = a^3 + 2a^2b + 3ab^2 + b^3$; $Q = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

-3 $x - 2y + 3z$ کی قیمت معلوم کریں

جبکہ $x = 2a^2 - a^3 + 3a + 4$

$y = 2a^3 - 3a^2 + 2 - 2a$

اور $z = a^4 + 3a^3 - 6 - 5a^2$

-4 دو کثیر رقمیوں کا مجموعہ $y^2 - 2x + x^2$ ہے اگر ایک کثیر رقمی $3 + 2xy - x^2$ ہو تو دوسری کثیر رقمی معلوم کریں۔

-5 $4x + 6 - 2x^2$ کو $x^3 + x^2 - 2x$ اور $2x^3 + 3x - 7$ کے مجموعہ میں سے تفریق کریں۔

-6 درج ذیل کثیر رقمیوں کی حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ **(ii)** $(3x^2 - 7x + 5)(4x^2 - 2x + 1)$

(iii) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

-7 اگر $P = x^2 - yz$ ، $Q = y^2 - xz$ اور $R = z^2 - xy$ تو PQ ، QR ، PR اور PQR معلوم کریں۔

-8 مختصر کیجیے:

(i) $(x^2 + x - 6) \div (x - 2)$ **(ii)** $(x^3 - 19x - 30) \div (x + 3)$

(iii) $(x^5 - y^5) \div (x - y)$ **(iv)** $(x^3 + x^2 - 14x - 24) \div (x + 2)$

(v) $(16a^5 + 4a^3 - 4a^2 + 3a - 1) \div (4a^2 - 2a + 1)$

(vi) $(x^4 - 3x^2y^2 + y^4) \div (x^2 + xy - y^2)$

-9 $4x^3 - 10x^2 + 12x + 6$ میں کیا جمع کیا جائے کہ $2x + 1$ اِسے پورا پورا تقسیم کردے؟

-10 دو کثیر رقمیوں کا حاصل ضرب $6y^3 - 11y^2 + 6y - 1$ ہے اگر اُن میں سے ایک کثیر رقمی $3y^2 - 4y + 1$ ہو تو دوسری کثیر رقمی معلوم کریں۔

-11 p کی کس قیمت کے لیے کثیر رقمی $x - 3$ کثیر رقمی $3x^3 - 7x^2 - 9x + p$ کو پورا پورا تقسیم کردے گی؟

جائزہ مشق 5

-1 ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) الجبرا میں $4x + 2y + 3z$ کو کیا کہیں گے؟
(a) الجبری جملہ **(b)** مساوات **(c)** غیر مساوات **(d)** علامت

(ii) حرفِ تہجی جو مختلف قیمتیں لے سکتا ہے کیا کہلاتا ہے؟
(a) مستقل **(b)** متغیر **(c)** رقم **(d)** عدد

(iii) $2x - 3y + 4z$ میں متغیرات کی تعداد بتایے:
(a) 2 **(b)** 3 **(c)** 4 **(d)** 5

(iv) متغیرات کو کس طرح سے ظاہر کیا جاتا ہے؟
(a) مستقلات **(b)** اعداد **(c)** حروفِ تہجی **(d)** حرفی مقداریں

(v) الجبری جملوں میں کیا کیا شامل ہوتا ہے؟
(a) اعداد، متغیرات اور عوامل **(b)** عدد اور عوامل **(c)** صرف متغیرات **(d)** صرف عوامل

(vi) الجبرا میں $2x^{-2}$ کو کیا کہتے ہیں؟
(a) کثیر رقمی **(b)** غیر کثیر رقمی **(c)** مستقل رقم **(d)** غیر مساوات

(vii) $3x^2 + 2x - 1$ میں کثیر رقمی کا درجہ کتنا ہے؟
(a) 1 **(b)** 2 **(c)** 3 **(d)** 4

(viii) ایک کثیر رقمی میں جس عدد سے متغیر کو ضرب دی جائے اُسے کیا کہتے ہیں؟
(a) عدد **(b)** عددی سر **(c)** انڈیکس **(d)** مستقل

(ix) $3y^2$ کثیر رقمی کتنے درجے کی ہے؟
(a) یک درجی **(b)** دو درجی **(c)** سہ درجی **(d)** چہار درجی

(x) Biquadratic الجبری جملہ کتنے درجے کی کثیر رقمی ہے؟
(a) ایک **(b)** دو **(c)** تین **(d)** چار

-2 درج ذیل جدول میں کثیر رقمی کی قسم اور درجہ لکھیں۔

نمبر شمار	الجبری جملہ	کثیر رقمی	کثیر رقمی کا درجہ
i.	$2.3 + 1.2x$		
ii.	$k^2 + 5k^{-1} + 6$		
iii.	-9		
iv.	$2c^4 + 5b + \frac{6}{7}$		

3- درج ذیل کثیر رقمیوں کا مجموعہ معلوم کریں۔

i. $2a + 3b + c,\quad 3a - b - c,\quad 4b + 5c,\quad -2a + 3c,\quad -b + c$

ii. $9z + 3y^2 - 5x^3,\quad -z - 2y^2 - 4x^3,\quad z - x^3,\quad -2z + 3y^2$

4- حل کریں۔

i. $(-2x^2 + 5y^2 - 3z^2) - (5x^2 - 3y^2 - 6z^2)$

ii. $(6x^3 + x^2 - 26) - (9 + 3x^2 - 5x^3)$

iii. $(y^2 - 5)(-y^2 + 5)$

iv. $(3a + 2b)(4a^2 - 7b + 5)$

v. $(x^4 + x - 2) \div (x - 1)$

خلاصہ

- الجبری جملہ ریاضی کا ایسا جملہ ہوتا ہے جس میں اعداد، متغیرات جیسے x ، y اور جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے عوامل ہوتے ہیں۔
- مستقلات الجبرا میں ایسی علامات ہوتی ہیں جن کی قیمت مقرر ہوتی ہے اور وہ تبدیل نہیں ہوتی۔
- الجبرا میں ایسی علامات جو مختلف عددی قیمتیں اختیار کر سکتی ہیں کو متغیرات کہتے ہیں۔
- حروف تہجی جو مستقلات اور عددی سر کے طور پر استعمال ہوں کو حرفی مقداریں کہتے ہیں۔
- الجبری جملے جن میں محدود رقوم ہوں اور متغیرات کے قوت نما مکمل اعداد ہوں کثیر رقمیاں کہلاتے ہیں۔
- کثیر رقمی صفر ہو سکتی ہے اور اُسے محدود رقوم کے مجموعہ کی غیر صفری صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔
- کثیر رقمی میں عددی سر ایک ہوتا ہے جسے متغیرات کے ساتھ ضرب کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔
- جس کثیر رقمی کا درجہ ایک ہو اُسے یک درجی کثیر رقمی کہتے ہیں۔
- جس کثیر رقمی کا درجہ دو ہو اُسے دو درجی کثیر رقمی کہتے ہیں۔
- جس کثیر رقمی کا درجہ تین ہو اُسے سہ درجی کثیر رقمی کہتے ہیں۔
- جس کثیر رقمی کا درجہ چار ہو اُسے چہار درجی کثیر رقمی کہتے ہیں۔