

اجزائے ضربی، ہمزا و مساواتیں (Factorization, Simultaneous Equations)

یونٹ-6

اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- درج ذیل کلیات کا اعادہ کر سکیں۔
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- کلیہ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ کا اعادہ کر سکیں اور اسے مسائل کے حل میں استعمال کر سکیں۔
- $(102)^2$ ، $(1.02)^2$ ، $(98)^2$ اور $(0.98)^2$ کو مختصر کر سکیں۔
- $x^2 + \frac{1}{x^2}$ اور $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کی قیمتیں معلوم کر سکیں جبکہ $x \pm \frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم ہو۔
- درج ذیل اقسام کے جملوں کی تجزی کر سکیں:
- $a^2 \pm 2ab + b^2$ ■ $ac + ad + bc + bd$ ■ $Ka + kb + kc$
- $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ ■ $a^2 - b^2$
- درج ذیل کلیات کی پہچان کر سکیں اور انہیں مسائل کے حل کے لیے استعمال کر سکیں۔
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $x^3 + \frac{1}{x^3}$ اور $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کی قیمتیں معلوم کر سکیں جبکہ $x \pm \frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم ہو۔
- ایک اور دو متغیرات والی ایک درجی ہمزا و مساواتوں کی پہچان کر سکیں۔
- دو متغیرات میں ایک درجی مساوات کو حل کر سکیں۔
- معلوم کر سکیں کہ:
- دو متغیرات میں ایک درجی مساوات کا حل بہت سے مرتب جوڑے ہوتے ہیں۔
- دو متغیرات میں دو درجی ہمزا و مساواتوں کا حل صرف ایک مرتب جوڑا ہوتا ہے۔
- ہمزا و مساواتوں کو درج ذیل طریقوں سے حل کر سکیں:
- عددی سروں کو برابر کرنے کا طریقہ
- قیمت درج کرنے کا طریقہ
- ضرب چلیپائی کا طریقہ
- دو متغیرات میں دو ہمزا و مساواتوں کے روزمرہ زندگی سے متعلق مسائل حل کر سکیں۔
- دو مساواتوں میں سے ایک متغیر کو ساقط کر سکیں:
- قیمت درج کرنے کے طریقہ سے
- کلیات کے استعمال سے

6.1 بنیادی الجبری فارمولے

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \bullet$$

مثال 1: فارمولا کی مدد سے $(107)^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$(107)^2 = (100 + 7)^2 \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} &= (100)^2 + 2(100 \times 7) + (7)^2 \\ &= 10000 + 1400 + 49 \\ &= 11449 \end{aligned}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \bullet$$

مثال 2: فارمولا کے استعمال سے $(87)^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$(87)^2 = (90 - 3)^2 \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} &= (90)^2 - 2(90 \times 3) + (3)^2 \\ &= 8100 - 540 + 9 \\ &= 7569 \end{aligned}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad \bullet$$

مثال 3: فارمولا کے استعمال سے 107×93 کی قیمت معلوم کریں۔

$$107 \times 93 = (100 + 7)(100 - 7) \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} &= (100)^2 - (7)^2 \\ &= 10000 - 49 \\ &= 9951 \end{aligned}$$

$$\text{مثال 4: } x - \frac{1}{x} = 2 \text{ اور } x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \text{ کی قیمت معلوم کریں جبکہ } x^4 + \frac{1}{x^4} = 2 \quad \text{حل:}$$

$$x - \frac{1}{x} = 2$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (2)^2 \quad \text{طرفین کا مربع لینے سے}$$

$$\text{یا } x^2 - 2\left(x\right)\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 4$$

$$\text{یا } x^2 + \frac{1}{x^2} = 4 + 2$$

$$\text{یا } x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$$

$$\text{یا } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (6)^2 \quad \text{طرفین کا دوبارہ مربع لینے سے}$$

$$\text{یا } (x^2)^2 + 2(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = 36$$

$$\text{یا } x^4 + \frac{1}{x^4} = 36 - 2$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 34$$

مشق 6.1

فارمولوں کو استعمال کر کے مندرجہ ذیل سوالات کو حل کریں۔

- 1- مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا مربع معلوم کریں۔
 (i) 53 (ii) 77 (iii) 509 (iv) 1006
- 2- مندرجہ ذیل میں ہر ایک کی قیمت معلوم کریں۔
 (i) $(57)^2$ (ii) $(95)^2$ (iii) $(598)^2$ (iv) $(1997)^2$
- 3- قیمت معلوم کریں۔
 (i) 46×54 (ii) 197×203 (iii) 999×1001 (iv) 0.96×1.04

$$x + \frac{1}{x} = 7 \text{ جبکہ } x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ کی قیمت معلوم کریں جبکہ (i) -4}$$

$$x - \frac{1}{x} = 3 \text{ جبکہ } x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ کی قیمت معلوم کریں جبکہ (ii)}$$

$$x - \frac{1}{x} = 1 \text{ جبکہ } x^4 + \frac{1}{x^4} \text{ کی قیمت معلوم کریں جبکہ (iii)}$$

6.2 اجزائے ضربی (Factorization)

اجزائے ضربی ایسے الجبری جملے ہوتے ہیں جن کا حاصل ضرب دیا ہوا جملہ ہو۔ دیے ہوئے جملوں کے حاصل ضرب کے اظہار کے عمل کو تجزی کہتے ہیں۔

(i) قسم $Ka + Kb + Kc$:

مثال 1: $2x - 4y + 6z$ کی تجزی کریں۔

$$2x - 4y + 6z \\ = 2(x - 2y + 3z) \quad (2 \text{ ایک مشترک جزو ضربی ہے})$$

مثال 2: $x^2 - xy + xz$ کی تجزی کریں۔

$$x^2 - xy + xz \\ = x(x - y + z)$$

مثال 3: $3x^2 - 6xy$ کی تجزی کریں۔

$$3x^2 - 6xy \\ = 3x(x - 2y)$$

مشق 6.2

مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

1. $3x - 9y$
2. $xy + xz$
3. $6ab - 14ac$
4. $3m^3np - 6m^2n$
5. $30x^3 - 45xy$
6. $17x^2y^2 - 51$
7. $4x^3 + 3x^2 + 2x$
8. $2p^2 - 4p^3 + 8p$
9. $x^3y - x^2y + xy^2$
10. $7x^4 - 14x^2y + 21xy^3$
11. $x^2y^2z^2 - xyz^2 + xyz$
12. $4x^3y^2 - 8xy + 4xy^3$
13. $xy^4 - 3xy^3 - 6xy^2$
14. $x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2$
15. $77x^2y - 33xy^2 - 55x^2y^2$
16. $5x^5 + 10x^4 + 15x^3$

ac + ad + bc + bd: (Type) قسم (ii)

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 4: $3x + cx + 3c + c^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 3x + cx + 3c + c^2 \\ &= (3x + cx) + (3c + c^2) \\ &= x(3 + c) + c(3 + c) \\ &= (3 + c)(x + c) \end{aligned}$$

مثال 5: $2x^2y - 2xy + 4y^2x - 4y^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 2x^2y - 2xy + 4y^2x - 4y^2 \\ &= 2y(x^2 - x + 2yx - 2y) \\ &= 2y[x(x - 1) + 2y(x - 1)] \\ &= 2y(x - 1)(x + 2y) \end{aligned}$$

مشق 6.3

مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

1. $ax - by + bx - ay$
2. $2ab - 6bc - a + 3c$
3. $x^2 + 2x - 3x - 6$
4. $x^2 + 5x - 2x - 10$
5. $x^2 - 7x + 2x - 14$
6. $x^2 + 3x - 4x - 12$
7. $y^2 - 9y + 3y - 27$
8. $x^2 - 8x - 4x + 32$
9. $x^2 - 7x - 5x + 35$
10. $x^2 - 13x - 2x + 26$
11. $a(x - y) - b(x - y)$
12. $y(y - a) - b(y - a)$
13. $a^2(pq - rs) + b^2(pq - rs)$
14. $ab(x + y) + cd(x + y)$

(iii) قسم (Type) $a^2 \pm 2ab + b^2$

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 6: $9a^2 + 30ab + 25b^2$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 9a^2 + 30ab + 25b^2 \\ &= (3a)^2 + 2(3a \times 5b) + (5b)^2 \\ &= (3a + 5b)^2 \end{aligned}$$

مثال 7: $16x^2 - 64x + 64$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 16x^2 - 64x + 64 \\ &= 16(x^2 - 4x + 4) \\ &= 16[(x)^2 - 2(2)(x) + (2)^2] \\ &= 16(x - 2)^2 \end{aligned}$$

مثال 8: $8x^3y + 8x^2y^2 + 2xy^3$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 8x^3y + 8x^2y^2 + 2xy^3 \\ &= 2xy(4x^2 + 4xy + y^2) \\ &= 2xy[(2x)^2 + 2(2x)(y) + (y)^2] = 2xy(2x + y)^2 \end{aligned}$$

مشق 6.4

تجزی کریں۔

1. $x^2 + 14x + 49$
2. $9a^2 + 12ab + 4b^2$
3. $16 + 24a + 9a^2$
4. $25x^2 + 80xy + 64y^2$
5. $7a^4 + 84a^2 + 252$
6. $4a^2 + 120a + 900$
7. $x^2 - 34x + 289$
8. $49x^2 - 84x + 36$
9. $x^2 - 18xy + 81y^2$
10. $a^4 - 26a^2 + 169$
11. $2a^2 - 64a + 512$
12. $1 - 6a^2b^2c + 9a^4b^4c^2$
13. $4x^4 + 20x^3yz + 25x^2y^2z^2$
14. $\frac{9}{16}x^2 + xy + \frac{4}{9}y^2$
15. $\frac{49}{64}x^2 - 2xy + \frac{64}{49}y^2$
16. $\frac{a^2}{b^2}x^2 - \frac{2ac}{bd}xy + \frac{c^2y^2}{d^2}$
17. $16x^6 - 16x^5 + 4x^4$
18. $a^4b^4x^2 - 2a^2b^2c^2d^2xy + c^4d^4y^2$

(iv) قسم (Type) $a^2 - b^2$

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 9: $25x^2 - 64$ کی تجزی کریں۔

حل:

$$\begin{aligned} & 25x^2 - 64 \\ &= (5x)^2 - (8)^2 \\ &= (5x + 8)(5x - 8) \end{aligned}$$

مثال 10: $16y^2b - 81bx^2$ کی تجزی کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} & 16y^2b - 81bx^2 \\ & = b(16y^2 - 81x^2) \\ & = b[(4y)^2 - (9x)^2] \\ & = b(4y + 9x)(4y - 9x) \end{aligned}$$

مثال 11: $(3x - 5y)^2 - 49z^2$ کی تجزی کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} & (3x - 5y)^2 - 49z^2 \\ & = (3x - 5y)^2 - (7z)^2 \\ & = (3x - 5y + 7z)(3x - 5y - 7z) \end{aligned}$$

مثال 12: $36(x + y)^2 - 25(x - y)^2$ کی تجزی کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} & 36(x + y)^2 - 25(x - y)^2 \\ & = [6(x + y)]^2 - [5(x - y)]^2 \\ & = [6(x + y) + 5(x - y)][6(x + y) - 5(x - y)] \\ & = (11x + y)(x + 11y) \end{aligned}$$

مثال 13: $(677)^2 - (323)^2$ کو فارمولہ کی مدد سے حل کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} & (677)^2 - (323)^2 \\ & = (677 + 323)(677 - 323) \\ & = 1000 \times 354 \\ & = 354000 \end{aligned}$$

مثال 14: $\frac{0.987 \times 0.987 - 0.643 \times 0.643}{0.987 + 0.643}$ کو مختصر کریں۔
حل:

$$\begin{aligned} & \frac{0.987 \times 0.987 - 0.643 \times 0.643}{0.987 + 0.643} \\ & = \frac{(0.987)^2 - (0.643)^2}{0.987 + 0.643} \\ & = \frac{(0.987 + 0.643)(0.987 - 0.643)}{0.987 + 0.643} \\ & = 0.987 - 0.643 \\ & = 0.344 \end{aligned}$$

مشق 6.5

مندرجہ ذیل کی تجزی کریں۔

- | | |
|--------------------------|-----------------------|
| 1. $9 - x^2$ | 2. $-6 + 6y^2$ |
| 3. $16x^2y^2 - 25a^2b^2$ | 4. $x^3y - xy^3$ |
| 5. $16a^2 - 400b^2$ | 6. $a^2b^3 - 64a^2b$ |
| 7. $7xy^2 - 343x$ | 8. $5x^3 - 45x$ |
| 9. $11(a + b)^2 - 99c^2$ | 10. $75 - 3(a - b)^2$ |

11. $\left(x - \frac{9}{5}\right)^2 - \frac{36}{25}y^2$

13. $16(a+b)^2 - 49(a-b)^2$

15. $(371)^2 - (129)^2$

17. $\frac{(0.567)^2 - (0.433)^2}{0.567 - 0.433}$

12. $25\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - 16\left(x + \frac{7}{4}\right)^2$

14. $36\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - 64\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$

16. $(674.17)^2 - (325.83)^2$

18. $\frac{(0.409)^2 - (0.391)^2}{0.409 - 0.391}$

مندرجہ ذیل کو مختصر کریں:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2 : (\text{Type}) \text{ (v)}$$

اس کی درج ذیل مثالوں سے وضاحت کی گئی ہے۔

مثال 15: $a^2 - 2ab + b^2 - 4c^2$ کی تجزی کریں۔

$$(a^2 - 2ab + b^2) - 4c^2$$

$$= (a-b)^2 - (2c)^2$$

$$= (a-b-2c)(a-b+2c)$$

حل:

مثال 16: $4a^2 + 4ab + b^2 - 9c^2$ کی تجزی کریں۔

$$4a^2 + 4ab + b^2 - 9c^2$$

$$= (2a)^2 + 2(2a)(b) + (b)^2 - 9c^2$$

$$= (2a+b)^2 - (3c)^2$$

$$= (2a+b-3c)(2a+b+3c)$$

حل:

مشق 6.6

تجزی کریں۔

1. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

2. $a^2 + 6ab + 9b^2 - 16c^2$

3. $a^2 + b^2 + 2ab - 9a^2b^2$

4. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9x^2y^2$

5. $9a^2 - 6ab + b^2 - 16c^2$

6.3 الجبری جملے کا عمل (Manipulation of Algebraic Expression)

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3 \text{ فارمولا:}$$

مثال 1: $(3a+4b)^3$ کو کھولیں۔

$$(3a+4b)^3$$

$$= (3a)^3 + 3(3a)(4b)(3a+4b) + (4b)^3$$

$$= 27a^3 + 36ab(3a+4b) + 64b^3$$

$$= 27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$$

حل:

• فارمولا: $(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$

اس فارمولا کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔
مثال 2: $(2a - 3b)^3$ کو کھولیں۔

$$(2a - 3b)^3$$

$$= (2a)^3 - 3(2a)(3b)(2a - 3b) - (3b)^3$$

$$= 8a^3 - 18ab(2a - 3b) - 27b^3$$

$$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$$

مثال 3: اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ ہو تو $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$x + \frac{1}{x} = 5 \quad \text{حل: ہم جانتے ہیں کہ}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (x)^3 + 3(x) \left(\frac{1}{x}\right) \times \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$(5)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(5) \quad \therefore \left(x + \frac{1}{x}\right) = 5$$

$$125 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 15$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 125 - 15$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 110$$

مشق 6.7

1- مندرجہ ذیل کے مکعب (Cube) معلوم کریں۔

(i) $x + 4$

(ii) $2m + 1$

(iii) $a - 2b$

(iv) $5x - 1$

(v) $2a + b$

(vi) $3x + 10$

(vii) $2m + 3n$

(viii) $4 - 3a$

(ix) $3x + 3y$

(x) $7 + 2b$

(xi) $4x - 2y$

(xii) $5m + 4n$

$$-2 \text{ اگر } x + \frac{1}{x} = 8 \text{ ہو تو } x^3 + \frac{1}{x^3} \text{ کی قیمت معلوم کریں۔}$$

$$-3 \text{ اگر } x - \frac{1}{x} = 3 \text{ ہو تو } x^3 - \frac{1}{x^3} \text{ کی قیمت معلوم کریں۔}$$

$$-4 \text{ اگر } x + \frac{1}{x} = 7 \text{ ہو تو } x^3 + \frac{1}{x^3} \text{ کی قیمت معلوم کریں۔}$$

$$-5 \text{ اگر } x - \frac{1}{x} = 2 \text{ ہو تو } x^3 - \frac{1}{x^3} \text{ کی قیمت معلوم کریں۔}$$

$$-6 \text{ مندرجہ ذیل کا فارمولے کی مدد سے کعب معلوم کریں۔}$$

(i) 13

(ii) 103

(iii) 0.99

6.4 ایک درجی ہمزاد مساواتیں (Simultaneous Linear Equations)

دو یا دو سے زیادہ ایک متغیر میں ایک درجی مساواتیں ہمزاد ایک رکنی مساواتیں کہلاتی ہیں۔

6.4.1 ایک اور دو متغیرات میں ایک درجی مساواتوں کی پہچان

ہم جانتے ہیں کہ ایک درجی مساوات ایک الجبری مساوات ہوتی ہے۔ جس کی ہر رقم مستقل مقدار، یا مستقل مقدار اور متغیر کا حاصل ضرب یا ایک متغیر ہو۔ ایک متغیر کی ایک درجی مساوات کی معیاری صورت یہ ہے:

$$ax + b, \quad \forall a, b \in R$$

اسی طرح دو متغیرات میں ایک درجی مساوات کی صورت ہے $ax + by = c$ جبکہ a, b, c اور c مستقل مقداریں ہیں۔ دو

ایک درجی مساواتیں ایک درجی مساواتوں کا ایک نظام بناتی ہیں۔ مثال کے طور پر:

$$x + y = 2$$

$$x - y = 1$$

ایک دو متغیرات x اور y میں ایک درجی مساواتوں کا نظام ہے۔ یہ دو ایک درجی مساواتوں کا نظام، سادہ ترین ایک درجی نظام

ہے۔ اس کو عام طور پر یوں لکھا جاتا ہے:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

6.4.2 دو متغیرات میں ایک درجی مساوات بنانے کا تصور

دو متغیرات کو الجبری بیانات کی شکل میں لکھنے کا طریقہ درج ذیل مثالوں سے واضح کیا گیا ہے۔

مثال 1: ہر بیان کے لیے ایک مساوات لکھیں۔

(i) ایک کتاب کی قیمت اور 3 پینسلوں کی قیمت 90 روپے ہے۔

(ii) دو اعداد کا مجموعہ 5 ہے۔

(iii) ارم کا وزن علی کے وزن کا آدھا ہے۔

حل: (i) ایک کتاب کی قیمت اور 3 پینسلوں کی قیمت 90 روپے ہے:

فرض کیا کتاب کی قیمت x روپے اور ایک پینسل کی قیمت y روپے

ایک کتاب اور 3 پینسلوں کی قیمت $90 =$ روپے

مساوات یوں لکھی جاسکتی ہے $x + 3y = 90$

(iii) ارم کا وزن علی کے وزن کا آدھا ہے:

فرض کیا ارم کا وزن x اور علی کا وزن y

مساوات کی صورت میں یوں لکھ سکتے ہیں $x = \frac{y}{2}$

(ii) دو اعداد کا مجموعہ 5 ہے:

فرض کیا پہلا عدد x اور دوسرا عدد y

مساوات کی صورت میں یوں لکھا جاسکتا ہے $x + y = 5$

6.4.3 دو متغیرات میں یک درجی مساوات کا حل

دو متغیرات میں یک درجی مساوات $ax + by = c$ کا حل ایک مترتب جوڑا ہے (x, y) جو اس مساوات کے دونوں اطراف کو برابر کرتا ہے۔ چونکہ ایک درجی مساوات ایک خط کو ظاہر کرتی ہے اس لیے یک درجی مساوات کے بہت سے حل ہوتے ہیں۔

مثال 2: $3x + y = 2$ کے چار حل معلوم کریں۔

حل: $3x + y = 2$

اب مساوات میں x کی جگہ 1 رکھیں تو

$$3(1) + y = 2$$

$$3 + y = 2$$

$$y = 2 - 3 = -1$$

اس لیے دوسرا حل $(1, -1)$ ہے۔

اب مساوات میں x کی جگہ 3 رکھیں تو

$$3(3) + y = 2$$

$$9 + y = 2$$

$$y = 2 - 9 = -7$$

اس لیے چوتھا حل $(3, -7)$ ہے۔

اس مساوات میں x کی جگہ 0 رکھیں تو

$$3(0) + y = 2$$

$$0 + y = 2$$

$$y = 2$$

اس لیے ایک حل $(0, 2)$ ہے۔

اب مساوات میں x کی جگہ 2 رکھیں تو

$$3(2) + y = 2$$

$$6 + y = 2$$

$$y = 2 - 6 = -4$$

اس لیے تیسرا حل $(2, -4)$ ہے۔

پس دی ہوئی مساوات کے لاتعداد حل ہیں۔ یعنی $(2, -4), (3, -7), (1, -1), (0, 2), \dots$

• دو متغیرات میں دو یک درجی مساواتوں کا حل

دو متغیرات میں دو یک درجی مساواتیں ہمزاد مساواتوں کے نظام کو بناتی ہیں۔ x اور y کی قیمت جو ہر ایک مساوات کے لیے موزوں ہو۔ ہمزاد یک درجی مساواتوں کا حل کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: دو یک درجہ مساواتیں $x + y = 5$ اور $x - y = 3$ کا حل $x = 4$ اور $y = 1$ ہے۔

$$\begin{array}{l|l} x + y = 5 & x - y = 3 \\ \text{L.H.S} = x + y & \text{L.H.S} = x - y \\ = (4) + (1) & = (4) - (1) \\ = 5 = \text{R.H.S} & = 3 = \text{R.H.S} \end{array}$$

پس $x = 4$ اور $y = 1$ ان مساواتوں کا حل ہے۔

مشق 6.8

1- نیچے دیے ہوئے بیانات کی مساوات لکھیں۔

- (i) والد کی عمر اور بیٹی کی عمر کا فرق 26 سال ہے۔
- (ii) 6 بسکٹ کی قیمت برابر ہے ایک چاکلیٹ کی قیمت کے
- (iii) اگر ایک عدد کو دوسرے عدد کے 3 گنا میں جمع کریں تو مجموعہ 25 ہے۔
- (iv) دو اعداد کے مجموعے سے ان اعداد کے فرق کی حاصل تقسیم 1 ہے۔ (دوسرا عدد پہلے عدد سے چھوٹا ہے)
- (v) کسی عمر کے دو گئے میں 7 سال کا اضافہ کرنے سے y سال بنتے ہیں۔

2- مساوات $2x + y = 3$ کے دو حل معلوم کریں۔ 3- مساوات $x + y = 2$ کے تین حل معلوم کریں۔

4- مساوات $y = 2x$ کے چار حل معلوم کریں۔ 5- کیا $(1, 2)$ حل ہے $x + y = 3$ اور $2x + 7y = 16$ کا؟

6- کون سا ایک $(3, 1)$ اور $(0, 3)$ میں سے حل ہے $x - y = 3$ اور $2x + 5y = 15$ کا؟

6.5 ہمزاد یک درجہ مساواتوں کا حل (Solution of Simultaneous Linear Equations)

ہمزاد یک درجہ مساواتوں کے حل سے مراد متغیرات کی ایسی قیمتیں معلوم کرنا ہے جن سے یہ مساواتیں درست فقرے بن جائیں۔ اب ہم ان ہمزاد یک درجہ مساواتوں کا حل معلوم کرتے ہیں۔

6.5.1 ہمزاد یک درجہ مساواتوں کا حل

ہمزاد یک درجہ مساواتوں کے حل کرنے کے کئی طریقے ہیں۔ لیکن ہم یہاں صرف اپنے آپ کو تین طریقوں تک محدود رکھتے ہیں۔

• عددی سروں کو برابر کرنے کا طریقہ • قیمت درج کرنے کا طریقہ

• ضرب چلیپائی کا طریقہ (Cross Multiplication)

• عددی سروں کو برابر کرنے کا طریقہ

مثال 1: عددی سروں کے موازنے کے طریقے سے حل سیٹ معلوم کریں۔

$$\begin{array}{l} \text{حل:} \\ 9x + 8y = 1 \\ 5x - y = 6 \end{array}$$

$$9x + 8y = 1 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$5x - y = 6 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

پہلا مرحلہ: مساوات (ii) کو مترادف مساوات میں اس طرح تبدیل کریں کہ متغیر کا عددی سر مساوات (i) کے برابر ہو جائے۔ اس لیے مساوات (ii) کی طرف سے 8 سے ضرب دیں۔

$$\begin{aligned} 8(5x - y) &= 8(6) \\ 40x - 8y &= 48 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (iii)$$

دوسرا مرحلہ: مساوات (i) اور (iii) کو جمع کریں تاکہ ایک متغیر کی قیمت معلوم کی جاسکے۔

$$\begin{array}{r} 9x + 8y = 1 \\ 40x - 8y = 48 \\ \hline 49x = 49 \\ \hline x = \frac{49}{49} = 1 \end{array}$$

تیسرا مرحلہ: مساوات (i) یا (ii) میں x کی قیمت درج کریں تاکہ y کی قیمت معلوم ہو سکے۔

$$\begin{aligned} 5x - y &= 6 \quad \dots\dots\dots (ii) \\ 5(1) - y &= 6 \\ 5 - y &= 6 \\ y = 5 - 6 &= -1 \end{aligned}$$

پس $x = 1$ اور $y = -1$ مطلوبہ حل ہے۔

چوتھا مرحلہ: جواب کی پڑتال کے لیے x اور y کی قیمتیں کسی ایک مساوات میں درج کریں۔

$$\begin{aligned} 9x + 8y &= 1 \\ \text{L.H.S} &= 9x + 8y \\ &= 9(1) + 8(-1) \\ &= 9 - 8 = 1 = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

• قیمتیں درج کرنے کا طریقہ
مثال 2: قیمتیں درج کرنے کے طریقہ سے حل سیٹ معلوم کریں۔

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 5 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 5 \quad \dots\dots\dots (i) \\ x + 2y &= 1 \quad \dots\dots\dots (ii) \end{aligned}$$

پہلا مرحلہ: کسی ایک دی ہوئی مساوات سے x یا y کی قیمت معلوم کریں۔

مساوات (ii) سے

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x &= 1 - 2y \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (iii)$$

دوسرا مرحلہ: x کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 5 \quad \dots\dots\dots (i) \\ 3(1 - 2y) + 5y &= 5 \\ 3 - 6y + 5y &= 5 \\ 3 - y &= 5 \\ y = 3 - 5 &= -2 \end{aligned}$$

تیسرا مرحلہ: x کی قیمت معلوم کرنے کے لیے y کی قیمت مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$x = 1 - 2y$$

$$x = 1 - 2(-2) = 1 + 4$$

$$x = 5$$

پس $x = 5$ اور $y = -2$ مطلوبہ حل ہے

چوتھا مرحلہ: جواب کی پڑتال کے لیے x اور y کی قیمتیں مساوات (i) یا مساوات (ii) میں درج کریں۔

$$3x + 5y = 5 \quad \text{مساوات (i) سے}$$

$$\text{L.H.S} = 3(5) + 5(-2)$$

$$= 15 - 10$$

$$= 5 = \text{R.H.S}$$

$$\text{L.H.S} = (5) + 2(-2) \quad \text{اب مساوات (iii) میں قیمتیں درج کرتے ہیں۔}$$

$$= 5 - 4$$

$$= 1 = \text{R.H.S}$$

• ضرب چلیبائی کا طریقہ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{..... (i) فرض کیا مساواتیں یہ ہیں:}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \text{..... (ii)}$$

مساوات (i) کو b_2 سے اور مساوات (ii) کو b_1 سے ضرب دینے سے

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \quad \text{..... (iii)}$$

$$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \quad \text{..... (iv)}$$

مساوات (iii) کو مساوات (iv) میں سے تفریق کرنے سے

$$a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0$$

$$\pm a_1b_2x \pm b_1b_2y \pm b_2c_1 = 0$$

$$\hline a_2b_1x - a_1b_2x + b_1c_2 - b_2c_1 = 0$$

$$x(a_2b_1 - a_1b_2) = b_2c_1 - b_1c_2$$

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{1}{b_1c_2 - b_2c_1}$$

$$\frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1}$$

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{.....(A)}$$

اب مساوات (i) کو a_2 سے اور مساوات (ii) کو a_1 سے ضرب دینے سے

$$a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1 = 0 \quad \text{..... (v)}$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2 = 0 \quad \text{..... (vi)}$$

مساوات (v) کو مساوات (vi) میں سے تفریق کرنے سے

$$a_1 a_2 x + a_1 b_2 y + a_1 c_2 = 0$$

$$\pm a_1 a_2 x \pm a_2 b_1 y \pm a_2 c_1 = 0$$

$$a_1 b_2 y - a_2 b_1 y + a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$$

$$y (a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_2 c_1 - a_1 c_2$$

$$y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$\frac{y}{a_2 c_1 - a_1 c_2} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \dots \dots \dots (B)$$

$$\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y}{a_2 c_1 - a_1 c_2} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \text{مساوات (A) اور (B) سے}$$

مندرجہ ذیل شکل کی مدد سے اوپر والے حل کو یاد کرنے میں مدد ملے گی۔

$$\begin{array}{c} x \qquad y \qquad 1 \\ a_1 \mid b_1 \rightarrow c_1 \quad a_1 \rightarrow b_1 \mid c_1 \\ a_2 \mid b_2 \rightarrow c_2 \quad a_2 \rightarrow b_2 \mid c_2 \end{array}$$

دو اعداد کے درمیان تیر کے نشان بتاتے ہیں کہ ان دو اعداد کو ضرب کرنا ہے۔ اور دوسری حاصل ضرب کو پہلی حاصل ضرب

میں سے تفریق کرنا ہے۔

مثال 3: مندرجہ ذیل مساواتوں کا حل بذریعہ چلیپائی معلوم کریں۔

$$2x + y = 5$$

$$3x - 4y = 2$$

حل:

$$2x + y = 5 \quad \dots \dots \dots (i)$$

$$3x - 4y = 2 \quad \dots \dots \dots (ii)$$

دی ہوئی مساواتوں کو اس طرح لکھیں کہ دائیں طرف صفر ہو

$$2x + y - 5 = 0$$

$$3x - 4y - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c} x \qquad y \qquad 1 \\ 2 \mid 1 \rightarrow -5 \quad 2 \rightarrow 1 \mid -5 \\ 3 \mid -4 \rightarrow -2 \quad 3 \rightarrow -4 \mid -2 \end{array}$$

$$\frac{x}{(1)(-2) - (-4)(-5)} = \frac{y}{(-5)(3) - (-2)(2)} = \frac{1}{(2)(-4) - (3)(1)}$$

اب ہم فوراً حل لکھ سکتے ہیں

$$\frac{x}{-2 - 20} = \frac{y}{-15 + 4} = \frac{1}{-8 - 3}$$

$$\frac{x}{-22} = \frac{y}{-11} = \frac{1}{-11}$$

$$x = \frac{-22}{-11} = 2 \quad \text{اور} \quad y = \frac{-11}{-11} = 1$$

پس $x = 2$ ، $y = 1$ مطلوبہ حل ہے۔

پڑتال کے لیے $x = 2$ اور $y = 1$ کو مساوات (i) میں درج کریں۔

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ \text{L.H.S} &= 2(2) + (1) \\ &= 4 + 1 = 5 = \text{R.H.S} \end{aligned}$$

مشق 6.9

1- مندرجہ ذیل کا حل سیٹ عددی سروں کے برابری کے طریقہ سے معلوم کریں۔

(i) $2x + 5y = -1$
 $x - 2y = 4$

(ii) $x + y = 2$
 $x - y = 0$

(iii) $2x + 3y = 3$
 $x + 5y = 5$

(iv) $x - 4y = 4$
 $4x - y = 16$

(v) $2x - 3y = 6$
 $3x + 5y = 0$

(vi) $3x - 4y = 7$
 $5x + y = 27$

2- مندرجہ ذیل کا حل سیٹ معلوم کرنے کے لیے ساقط کرنے کا عمل قیمت درج کرنے کے طریقہ سے کریں۔

(i) $2x + 2y = 5$
 $x - 2y = 3$

(ii) $5x + 2y = 15$
 $-2x + y = 4$

(iii) $6x + y = 2$
 $x - 4y = 15$

(iv) $2x + 7y = 10$
 $3x + y = 3$

(v) $2x - 4y = -10$
 $y - 5x = -5$

(vi) $x + 8y = 15$
 $3x - y = 0$

3- مندرجہ ذیل کا حل سیٹ ضرب چلیپائی کے طریقہ سے معلوم کریں۔

(i) $2x - 7y = 11$
 $5x - 10y = 10$

(ii) $11x + 12y = 15$
 $12x + 11y = -23$

(iii) $2x - 9y + 10 = 0$
 $3x - 5y - 10 = 0$

(iv) $5x + y - 56 = 0$
 $x + 18y - 29 = 0$

(v) $9x - 11y - 15 = 0$
 $7x - 13y - 25 = 0$

(vi) $2y - 10x - 86 = 0$
 $2x + 5y - 11 = 0$

6.5.2 دو متغیرات میں دو ہمزاد یک درجی مساواتوں کے روزمرہ زندگی سے متعلق سوالات کا حل

مثال 4: ایک عدد دوسرے عدد کا نصف ہے۔ پہلے عدد کے تین گنا اور دوسرے عدد کے چار گنا کا مجموعہ 22 ہے۔ وہ اعداد معلوم کریں۔

حل: فرض کیا اعداد x اور y ہیں

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$x = \frac{y}{2} \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$3x + 4y = 22 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$x = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2x \quad \dots\dots\dots \text{(iii)} \quad \text{مساوات (i) سے}$$

مساوات (ii) میں y کی قیمت درج کرنے سے

$$3x + 4(2x) = 22 \Rightarrow 3x + 8x = 22 \Rightarrow 11x = 22 \Rightarrow x = \frac{22}{11} = 2$$

اب x کی قیمت مساوات (iii) میں درج کرنے سے

$$y = 2x \Rightarrow y = 2(2) = 4$$

پس اعداد 2 اور 4 ہیں

مثال 5: 11 سال پہلے علی کی عمر ولید کی عمر کا 5 گنا تھی۔ لیکن 7 سال بعد علی کی عمر ولید کی عمر کا 2 گنا ہوگی۔ ان کی عمریں معلوم کریں۔

حل: فرض کیا علی کی عمر = x سال اور ولید کی عمر = y سال

11 سال پہلے ان کی عمریں علی کی عمر = $(x - 11)$ سال اور ولید کی عمر = $(y - 11)$ سال

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$\text{علی کی عمر} = 5(\text{ولید کی عمر})$$

$$x - 11 = 5(y - 11)$$

$$x - 11 = 5y - 55$$

$$x - 5y = -55 + 11$$

$$x - 5y = -44 \quad \dots\dots\dots \text{(i)}$$

7 سال پہلے ان کی عمریں علی کی عمر = $(x + 7)$ سال اور ولید کی عمر = $(y + 7)$ سال

دی ہوئی شرط کے مطابق

$$\text{علی کی عمر} = 2(\text{ولید کی عمر})$$

$$x + 7 = 2(y + 7)$$

$$x + 7 = 2y + 14$$

$$x - 2y = 14 - 7$$

$$x - 2y = 7 \quad \dots\dots\dots \text{(ii)}$$

مساوات (i) اور (ii) کو حل کرنے سے

$$x - 5y = -44 \quad \dots\dots\dots \text{(i)}$$

$$\pm x \mp 2y = \pm 7 \quad \dots\dots\dots \text{(ii)}$$

$$\hline -3y = -51 \quad (\text{تفریق کرنے سے})$$

$$y = 17$$

$$x - 2y = 7$$

$$x - 2(17) = 7$$

$$x - 34 = 7$$

$$x = 34 + 7 = 41$$

پس علی کی عمر = 41 سال اور ولید کی عمر = 17 سال

مثال 6: اگر کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 5 جمع کریں تو حاصل کسر $\frac{1}{2}$ ہو جاتی ہے اور اگر شمار کنندہ اور نسب نما میں سے 3 کم کریں تو کسر $\frac{2}{5}$ ہو جاتی ہے۔ کسر معلوم کریں۔

حل: فرض کیا شمار کنندہ x اور نسب نما y ہے۔ اس لیے کسر $\frac{x}{y}$

دی ہوئی پہلی شرط کے مطابق

$$\frac{x+5}{y+5} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2(x+5) = y+5$$

$$\Rightarrow 2x+10 = y+5$$

$$\Rightarrow 2x-y = -5$$

$$y = 2x+5 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$\frac{x-3}{y-3} = \frac{2}{5}$$

دوسری شرط کے مطابق

$$5(x-3) = 2(y-3)$$

$$5x-15 = 2y-6$$

$$5x-2y = 15-6$$

$$5x-2y = 9 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

مساوات (i) سے y کی قیمت مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$5x-2(2x+5) = 9$$

$$5x-4x-10 = 9$$

$$x-10 = 9$$

$$x = 10+9 = 19$$

x کی قیمت مساوات (i) میں درج کرنے سے

$$y = 2x+5$$

$$y = 2(19)+5$$

$$y = 38+5$$

$$y = 43$$

پس مطلوبہ کسر $\frac{19}{43}$ ہے

مشق 6.10

- 1- احمد نے ایک عدد کے دو گنے میں 5 جمع کیا۔ پھر اس نے حاصل جمع میں سے عدد کا نصف تفریق کیا۔ آخر میں اس نے 8 حاصل کیا۔ عدد معلوم کریں۔
- 2- اگر ہم ایک عدد کے آدھے میں 3 جمع کرنے سے وہی نتیجہ حاصل کرتے ہیں جو ہم عدد کے چوتھائی میں سے 1 تفریق کرنے سے حاصل کرتے ہیں۔ تو عدد معلوم کریں۔
- 3- دو اعداد کا مجموعہ 5 ہے اور ان کا فرق 1 ہے۔ اعداد معلوم کریں۔

یہاں مساوات (iii) $x = 5 - a$ کے لیے درست ہے اور مساوات (iv) $x = 4 - b$ کے لیے درست ہے۔ لیکن دونوں مساواتوں کے لیے x کی صرف ایک ہی قیمت درست معلوم کرنے کے لیے:

ہم دونوں قیمتوں کو ایک دوسرے کے برابر لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 5 - a &= 4 - b \\ \Rightarrow a - b &= 5 - 4 \\ \Rightarrow a - b &= 1 \quad \dots\dots\dots (v) \end{aligned}$$

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ ایک نیا تعلق (v) قائم ہو گیا ہے جس میں x نہیں ہے۔ اس عمل کو اسقاط کہتے ہیں اور تعلق $a - b = 1$ کو اسقاط کیا ہوا کہتے ہیں۔

(a) دو مساواتوں میں سے ایک متغیر کو قیمت درج کرنے کے طریقہ سے اسقاط کرنا

مثال 7: قیمت درج کرنے کے طریقہ سے نیچے دی گئی مساواتوں سے x کو اسقاط کریں۔

$$ax - b = 0$$

$$cx - d = 0$$

حل: دی ہوئی مساواتیں ہیں:

$$ax - b = 0 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$cx - d = 0 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$ax = b \quad \text{or} \quad x = \frac{b}{a} \quad \text{مساوات (i) میں سے}$$

$$c \left(\frac{b}{a} \right) - d = 0 \quad \text{مساوات (ii) میں درج کرنے سے}$$

$$\Rightarrow bc - ad = 0$$

$$\Rightarrow bc = ad \quad \text{یہ مطلوبہ تعلق ہے جس میں سے } x \text{ کو اسقاط کیا گیا ہے۔}$$

مثال 8: مساواتوں میں سے x کو بذریعہ قیمت درج کرنے کے طریقہ سے اسقاط کریں۔

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\ell x + m = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$\ell x + m = 0 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$\ell x + m = 0 \quad \text{مساوات (ii) میں سے}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-m}{\ell}$$

x کی قیمت کو مساوات (i) میں درج کرنے سے

- 4- دو اعداد کا فرق 4 ہے۔ ایک عدد کے دو گئے میں دوسرے کے تین گنا کو جمع کرنے سے 43 حاصل ہوتا ہے۔ اعداد معلوم کریں۔
- 5- عدنان، عدیل سے 7 سال بڑا ہے۔ عدنان کی عمر کا $\frac{1}{4}$ عدیل کی عمر کے $\frac{1}{2}$ کے برابر ہے۔ ان کی عمریں معلوم کریں۔
- 6- 5 سال پہلے احسان کی عمر شکیل کی عمر کا 7 گنا تھا۔ لیکن 3 سال بعد احسان کی عمر شکیل کی عمر کا 4 گنا ہو جائے گی۔ ان کی عمریں معلوم کریں۔
- 7- ایک کسر کا نسب نما اس کے شمار کنندہ سے 5 بڑا ہے۔ لیکن اگر اس کے شمار کنندہ اور نسب نما میں سے 2 تفریق کریں تو ہمیں $\frac{1}{6}$ کسر حاصل ہوتی ہے۔ کسر معلوم کریں۔
- 8- فدانی 3 کلوگرام خربوزے اور 4 کلوگرام آم 470 روپے میں خریدے۔ انعم نے 5 کلوگرام خربوزے اور 6 کلوگرام آم 730 روپے میں خریدے خربوزوں اور آموں کی فی کلوگرام قیمت معلوم کریں۔
- 9- 2 فٹ بالوں اور 10 باسکٹ بالوں کی قیمت 2,300 روپے ہے اور 7 فٹ بالوں اور 5 باسکٹ بالوں کی قیمت 2,650 روپے ہے۔ ہر ایک فٹ بال اور باسکٹ بال کی قیمت معلوم کریں۔
- 10- اگر کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 1 کی کمی کی جائے تو کسر $\frac{2}{3}$ حاصل ہوتی ہے اور اگر اسی کسر کے نسب نما اور شمار کنندہ میں 2 کی کمی کریں تو یہ کسر $\frac{1}{3}$ ہو جاتی ہے۔ کسر معلوم کریں۔
- 11- اگر کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 1 کی کمی کی جائے تو کسر $\frac{1}{2}$ حاصل ہوتی ہے اور اگر اسی کسر کے نسب نما اور شمار کنندہ میں 3 کی کمی کریں تو کسر $\frac{1}{4}$ حاصل ہوتی ہے۔ کسر معلوم کریں۔

6.6 استقاط (Elimination)

مندرجہ ذیل ایک درجی ہمزاد مساواتوں پر غور کریں۔

$$x + 5 = 8 \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$x - 1 = 1 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ مساوات (i) درست ہے $x = 3$ کے لیے اور مساوات (ii) $x = 2$ کے لیے درست ہے لیکن x کی ایک ہی قیمت کے لیے دونوں مساواتیں درست نہیں ہیں۔

اب ایک درجی ہمزاد مساواتوں کا مشاہدہ کریں۔

$$x + a = 5 \quad \dots\dots\dots (iii)$$

$$x + b = 4 \quad \dots\dots\dots (iv)$$

$$a \left(\frac{-m}{\ell} \right)^2 + b \left(\frac{-m}{\ell} \right) + c = 0$$

$$\Rightarrow a \frac{m^2}{\ell^2} - b \frac{m}{\ell} + c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{am^2}{\ell^2} - \frac{bm}{\ell} + c = 0$$

$$\Rightarrow am^2 - b\ell m + c\ell^2 = 0 \quad (\ell^2 \text{ سے ضرب دینے سے})$$

$$am^2 - b\ell m + c\ell^2 = 0 \quad \text{یہ مطلوبہ نتیجہ ہے۔}$$

مشق 6.11

1- مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کو بذریعہ قیمت درج کرنے کے طریقہ سے ساقط کریں۔

(i) $ax - b = 0$

(ii) $2x + 3y = 5$

$cx - d = 0$

$x - y = 2$

(iii) $x + a = b$

(iv) $a - b = 2x$

$x^2 + a^2 = b^2$

$a^2 + b^2 = 3x^2$

(v) $x - m = \ell$

$(\ell - m)x + a = 0$

2- مندرجہ ذیل مساواتوں سے v_i کو ساقط کریں۔

(i) $v_f = v_i + at$

(ii) $v_f = v_i + at$

(iii) $v_f = v_i - gt$

$S = v_i t + \frac{1}{2} at^2$

$2aS = v_f^2 - v_i^2$

$S = v_i t + \frac{1}{2} gt^2$

(b) دو مساواتوں میں سے ایک متغیر کو فارمولوں کے استعمال سے ساقط کرنا

مثال 1: مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کو فارمولوں کے استعمال سے ساقط کریں۔

$$x + \frac{1}{x} = \ell; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2$$

حل:

$$x + \frac{1}{x} = \ell \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 \quad \dots\dots\dots (ii)$$

مساوات (i) کے طرفین کا مربع لینے سے

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = (\ell)^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \ell^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \ell^2 - 2 \quad \dots\dots\dots \text{(iii)}$$

مساوات (ii) اور (iii) کا موازنہ کرنے سے

$$\ell^2 - 2 = m^2 \quad \text{یہ مطلوبہ تعلق ہے۔}$$

مثال 2: مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے t کو ساقط کریں۔

$$x = \frac{2at}{1+t^2} ; \quad y = \frac{b(1-t^2)}{1+t^2}$$

حل:

$$x = \frac{2at}{1+t^2} \quad \dots\dots\dots \text{(i)}$$

$$y = \frac{b(1-t^2)}{1+t^2} \quad \dots\dots\dots \text{(ii)}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{مساوات (i) سے}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \quad \text{طرفین کا مربع لینے سے}$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{4t^2}{1+2t^2+t^4} \quad \dots\dots\dots \text{(iii)}$$

$$\frac{y}{b} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{مساوات (ii) سے}$$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 \quad \text{طرفین کا مربع لینے سے}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4} \quad \dots\dots\dots \text{(iv)}$$

مساوات (iii) اور (iv) کو جمع کرنے سے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4t^2}{1+2t^2+t^4} + \frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} = \frac{1 + 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{پس یہ مطلوبہ حل ہے}$$

مشق 6.12

-1 مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کو مناسب فارمولے کی مدد سے ساقط کریں۔

(i) $x - \frac{1}{x} = m ; x^2 + \frac{1}{x^2} = n^2$

(ii) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{2} ; x^2 + \frac{1}{x^2} = b^2$

(iii) $\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{\ell^2}{x^2} = b^2 ; \frac{\ell}{x} - \frac{x}{\ell} = a$

(iv) $\frac{x}{c} + \frac{c}{x} = 2a ; \frac{x}{c} - \frac{c}{x} = 3b$

(v) $x - \frac{1}{x} = \ell ; x^3 - \frac{1}{x^3} = m^3$

(vi) $x - \frac{1}{x} = p ; x^2 + \frac{1}{x^2} = 2q^2$

(vii) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3m^2 ; x^4 + \frac{1}{x^4} = n^4$

(viii) $x - \frac{1}{x} = a ; x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4$

-2 مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے t کو ساقط کریں۔

(i) $at^2 = x$
 $bt^3 = y$

(ii) $x - y = 2t$
 $x^2 + y^2 = 3t^2$

جائزہ مشق 6

-1 ہر بیان کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ صحیح جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) 99 کے مربع کو فارمولے کی مدد سے کیسے معلوم کریں گے؟

(a) $(100)^2 - 2(100)(1) + (1)^2$

(b) $(100)^2 + 2(100)(1) + (1)^2$

(c) $(100)^2 + 2(100)(1) - (1)^2$

(d) $(100)^2 - 2(100)(1) - (1)^2$

(ii) اگر $x + \frac{1}{x} = 9$ ہو تو $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کی قیمت کیا ہوگی؟

(a) 81

(b) 18

(c) 27

(d) 79

(iii) $5y(y-3) + 4(y-3)$ کی تجزی کیا ہوگی؟

(a) $(5y+y)(4-3)$

(b) $(5y-3)(y-r)$

(c) $(5y+4)(y-3)$

(d) $(y+3)(5y+4)$

(iv) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ کی تجزی کیا ہوگی؟

(a) $(2x+3y)(2x-3y)$

(b) $(2x-3y)(2x-3y)$

(c) $(2x+3y)(2x+3y)$

(d) $(2x-3y)(2x+3y)$

(v) اگر $x - \frac{1}{x} = 3$ ہو تو $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کی قیمت کیا ہوگی؟

(a) 27 (b) 18 (c) 30 (d) 36

(vi) اگر $x - y = 2$ اور $x + y = 6$ ہو تو y کی قیمت کیا ہوگی؟

(a) 4 (b) 2 (c) 6 (d) 8

(vii) $ax^2 = b$ اور $cx^2 = d$ میں سے x کو ساقط کریں تو کیا حاصل ہوگا؟

(a) $bc = ad$ (b) $bd = ac$ (c) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (d) $abc = d$

(viii) $x + \frac{1}{x} = b$ اور $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2$ میں سے x کو ساقط کرنے سے کیا حاصل ہوگا؟

(a) $a^2 = b^2 + 2$ (b) $a^2 + b^2 = 2$

(c) $a^2 - b^2 = -2$ (d) $a^2 + b^2 = -2$

2- نیچے دیے ہوئے سوالات کے جواب دیں۔

(i) ہمزاد یک درجی مساواتیں کیا ہوتی ہیں؟

(ii) ہمزاد یک درجی مساواتیں حل کرنے کے کون کون سے طریقے ہیں؟

(iii) ایک متغیر کو ساقط کرنے کے لیے کتنی مساواتیں چاہئیں؟

3- اگر $x + \frac{1}{x} = 7$ ہو تو $x^4 + \frac{1}{x^4}$ کی قیمت معلوم کریں۔

4- مندرجہ ذیل کی اجزائے ضربی معلوم کریں۔

i. $3xy + 6x^2y^2 + 9xz$ ii. $y^4 - 12y^2 + 36$ iii. $x^8 - y^8$

5- مندرجہ ذیل فارمولوں کے ذریعے مکعب معلوم کریں۔

i. 13 ii. $2x - 3y$ iii. $7a - b$

6- اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ ہو تو $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

7- مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کو بذریعہ قیمت درج کرنے کے طریقہ سے ساقط کریں۔

i. $ax - b = 0$ $cx^2 + mx = 0$ ii. $lx - n = 0$, $sx^2 + tx + u = 0$

8- مندرجہ ذیل مساواتوں میں فارمولا کے استعمال سے x ساقط کریں۔

i. $x + \frac{1}{x} = \frac{a}{3}$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = b^2$ ii. $x + \frac{1}{x} = 3b$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3$

iii. $x - \frac{1}{x} = a$, $x^4 + \frac{1}{x^4} = b^4$

9- اگر کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں 1 کا اضافہ کیا جائے تو $\frac{3}{4}$ کسر حاصل ہوتی ہے۔ اور اگر اسی کسر کے نسب نما اور شمار کنندہ میں سے 1 کم کیا جائے تو کسر $\frac{2}{3}$ بن جاتی ہے۔ کسر معلوم کریں۔

10- مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے t کو ساقط کریں۔

(i) $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{2at}{1-t^2}$

(ii) $x = \frac{1+t^2}{2at}$, $y = \frac{b(1-t^2)}{1+t^2}$

خلاصہ

تین بنیادی الجبری فارمولے:

i. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 ii. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 iii. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

• دو یا دو سے زیادہ کثیر رقمیوں کی حاصل ضرب جن کے مزید اجزاء نہ ہو سکیں کے اظہار کو تجزی کہتے ہیں۔

• مکعب کے فارمولے

i. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 ii. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

• اگر a اور b حقیقی اعداد ہوں اور دونوں صفر نہ ہوں تو $ax + by = r$ کو دو متغیرات x, y میں ایک ایک درجی مساوات کہتے ہیں اور a, b عددی سر اور مساوات کی مستقل مقدار ہے۔

• ہمزاد ایک درجی مساواتوں سے مراد ایک سے زیادہ یک درجی مساواتیں جن کے لیے ایک قیمت موزوں ہو۔

• دو متغیرات میں ہمزاد ایک درجی مساواتوں کی عام صورت

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

