یونٹ-9 ◀ رقبہ اور حجم (Areas and Volumes)

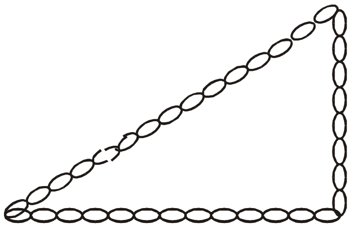
اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ :

- مسئلہ فیثاغورث کو بیان کر سکیں اور غیر رسمی ثبوت دے سکیں۔
- مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے قائمۃ الزاویہ مثلث کو حل کر سکیں۔
- ہیرو کے کلیہ کی مدد سے مثلثی علاقہ اور چوکور علاقہ جات کا رقبہ معلوم کر سکیں۔
- کرّہ کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کر سکیں۔
- مخروط کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کر سکیں۔
- روزمرّہ زندگی سے کرّہ اور مخروط کے رقبہ اور حجم سے متعلقہ مسائل حل کر سکیں۔

فیثاغورث 570-495

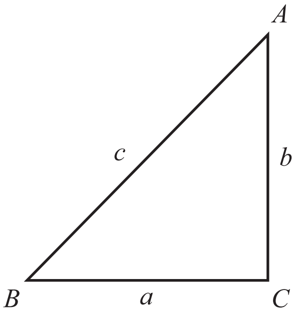
9.1 مسئلہ فیثاغورث (Pythagoras Theorem)

جیومیٹری میں مسئلہ فیثاغورث خاص اہمیت کا حامل ہے۔اس مسئلہ کا نام یونانی ریاضی دان فیثاغورث کے نام پر 2500 سال پہلے رکھا گیا تھا۔اُس زمانے میں مصری، دریائے نیل کی چوڑائی معلوم کرنے کا ایک طریقہ استعمال کرتے تھے۔فیثاغورث نے اُس طریقہ پر غور کیا اُور اس مسئلہ نے جنم لیا۔



وُہ ایک زنجیر کی مدد سے دریائے نیل کی چوڑائی معلوم کرتے تھے جس کے اضلاع میں 5 : 4 : 3 کی نسبت تھی۔

9.1.1 مسئلہ فیثاغورث کو بیان کرنا



ABC ایک قائمتہ الزاویہ مثلث ہے جس کا $\angle C$ قائمہ ہے۔ a، b اور c بالترتیب زاویہ A، B اور C کے متقابلہ اضلاع ہیں۔

تو
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$(\text{قاعدہ})^2 + (\text{ارتفاع})^2 = (\text{وتر})^2$$

یاد رکھیے۔

قائمہ زاویہ کے متقابلہ ضلع کو وتر کہتے ہیں۔زاویہ قائمہ کے ساتھ متصلہ افقی ضلع قاعدہ اور متصلہ عمودی ضلع ارتفاع کہلاتا ہے۔

مسئلہ فیثاغورث کا غیر رسمی ثبوت (Informal Proof of Pythagoras Theorem)

ایک سرگرمی کی مدد سے مسئلہ فیثاغورث کا ثبوت دیتے ہیں۔

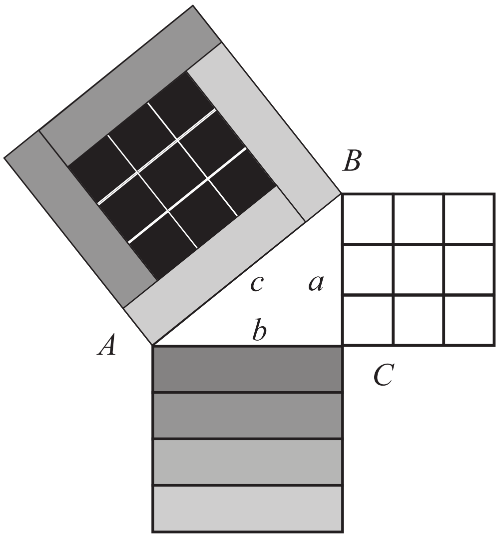
سرگرمی

سامان: مضبوط کاغذ، پنسل، پیمانہ، قینچی، رنگ دار پنسلیں

پہلا مرحلہ: ایک قائمتہ الزاویہ مثلث ABC بنائیں جس کا زاویہ C قائمہ ہے اور اضلاع a، b اور c ہیں

جبکہ $m\angle C = 90^\circ$ اور $a : b : c = 3:4:5$

دوسرا مرحلہ: اضلاع a، b اور c پر مربعے مکمل کیجیے۔



تیسرا مرحلہ: چونکہ $a : b : c = 3 : 4 : 5$ کی نسبت میں ہیں۔ اس لیے a، b اور c اضلاع پر بنے ہوئے مربعوں کو 3، 4 اور 5 یکساں چوڑائی کی پٹیوں (strips) میں تقسیم کریں۔

چوتھا مرحلہ: پٹیوں پر مختلف رنگ کرلیں۔

پانچواں مرحلہ: ضلع a پر بنے ہوئے مربع کو کاٹ لیں اور c پر بنے ہوئے مربع کے درمیان رکھ لیں۔

چھٹا مرحلہ: ضلع b پر بنے ہوئے مربع کی پٹیوں کو علیٰحدہ علیٰحدہ کاٹ لیں۔ اور اِن پٹیوں کو ضلع c پر بنے ہوئے مربع میں لگا دیں۔

ہم دیکھ سکتے ہیں ضلع c پر بنے ہوئے مربع کا رقبہ ضلع a، b پر بنے ہوئے دونوں مربعوں کے رقبہ کے مجموعہ کے برابر ہے۔

یعنی $$a^2 + b^2 = c^2$$

(وتر)^2 = (ارتفاع)^2 + (قاعدہ)^2

9.1.1 مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے قائمۃ الزاویہ مثلث کا حل

مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے قائمۃ الزاویہ مثلث کے تیسرے ضلع کی لمبائی معلوم کی جاتی ہے جبکہ دو اضلاع کی لمبائیاں دی ہوئی ہوں۔

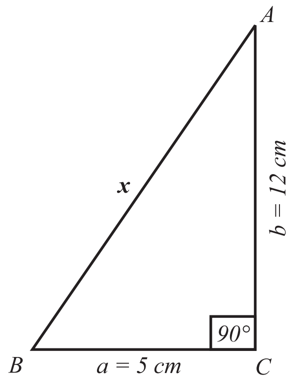
اگر قائمۃ الزاویہ کے متقابلہ ضلع کی لمبائی c ہو تو:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

یا $$a^2 = c^2 - b^2$$

یا $$b^2 = c^2 - a^2$$

مثال1: مثلث ABC میں ضلع $\overline{AB}$ کی لمبائی معلوم کریں۔



حل: فرض کریں:

$$m\overline{AB} = x$$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$c^2 = a^2 + b^2,\ m\angle C = 90^\circ$$

جبکہ $c = x, \quad a = 5cm, \quad b = 12cm$

اس لیے $x^2 = (5)^2 + (12)^2$

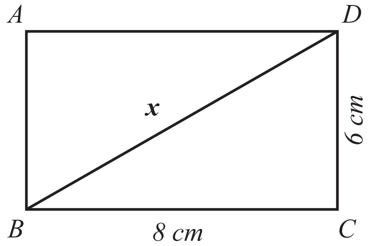
$$= 25 + 144$$

$$x^2 = 169$$

$$x = \sqrt{169} = 13cm$$

پس $m\overline{AB} = 13cm$

مثال2: ایک مستطیل کی لمبائی 8 سینٹی میٹر اور چوڑائی 6 سینٹی میٹر ہے۔اس کے وتر کی لمبائی معلوم کریں۔



حل: $ABCD$ ایک مستطیل ہے۔

فرض کیا:

$$m\overline{BD} = xcm$$

اب BCD قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس کا زاویہ C قائمہ ہے۔

قاعدہ $= m\overline{BC} = 8cm$

ارتفاع $= m\overline{CD} = 6cm$

وتر $= m\overline{BD} = x\ cm$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$x^2 = 8^2 + 6^2$$

$$x^2 = 64 + 36$$

$$x^2 = 100$$

اس لیے $x = \sqrt{100}$

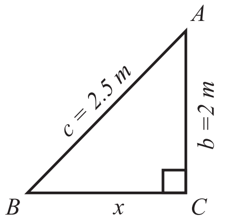
یا $x = 10cm$

چونکہ مستطیل کے دونوں وتر لمبائی میں برابر ہوتے ہیں اس لیے دوسرے وتر $\overline{AC}$ کی لمبائی بھی 10 سینٹی میٹر ہے۔

مثال 3: ایک سیڑھی کی لمبائی $2.5m$ ہے۔ اِسے دیوار کے ساتھ اس طرح کھڑا کیا گیا ہے کہ اس کا اوپر والا سِرا دیوار کی 2 میٹر اونچائی تک پہنچا۔ اِس کا نچلا سِرا دیوار سے کتنا دور ہے؟

حل: فرض کیا سیڑھی کے نچلے سِرے کا دیوار سے فاصلہ x میٹر ہے۔

یہاں $c = 2.5m, \quad a = x, \quad b = 2m$



مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$a^2 = c^2 - b^2$$

یا $$x^2 = (2.5)^2 - (2)^2$$

$$= 6.25 - 4$$

$$x^2 = 2.25$$

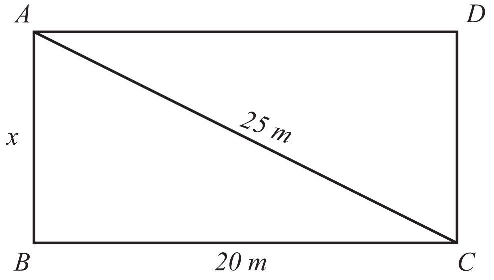
یا $$x = 1.5m$$

مثال 4: ایک مستطیل کھیت کا رقبہ معلوم کریں۔ جبکہ اُس کا طول $20m$ ہے اور وتر کی لمبائی $25m$ ہے۔

حل: ABC مثلث لیجیے۔

یہاں زاویہ B قائمہ ہے۔

$$b = 25m, \quad a = 20m$$



مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے c معلوم کرتے ہیں۔

فرض کیا $c = xm$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$x^2 = (25)^2 - (20)^2 = 625 - 400$$

$$x^2 = 225$$

یا $$x = \sqrt{225}$$

$$x = 15m$$

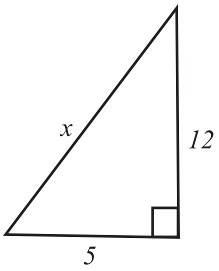
مستطیل کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

$$= 20 \times 15$$

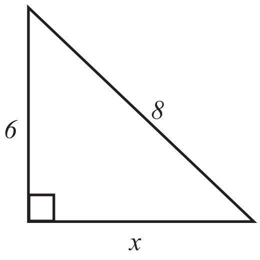
یوں مستطیل کھیت کا رقبہ $= 300m^2$

مشق 9.1

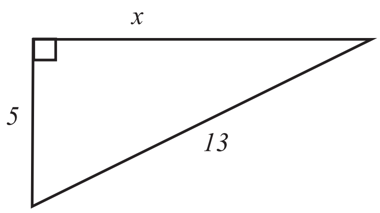
-1 نیچے دی گئی قائمۃ الزاویہ مثلثوں میں نامعلوم اضلاع کی لمبائیاں معلوم کریں۔



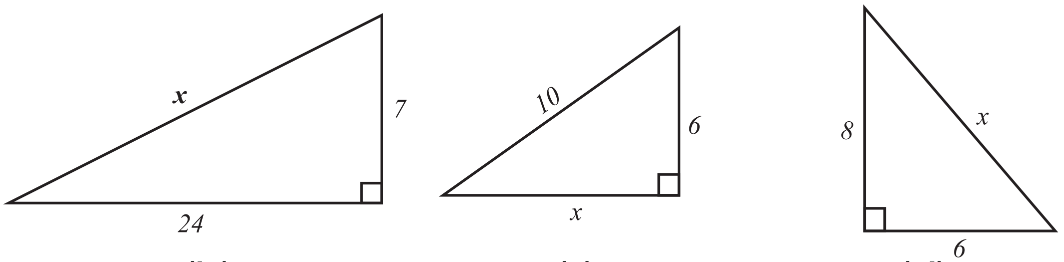
(i)



(ii)



(iii)



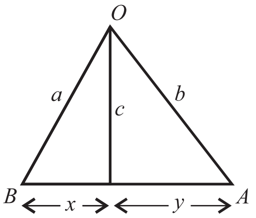
(iv) (v) (vi)

2- ایک مساوی الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی کے مربع کا رقبہ 98 مربع سینٹی میٹر ہے۔ متماثل اضلاع میں سے ہر ایک کی لمبائی معلوم کریں۔

3- ایک سیڑھی کی لمبائی 10 میٹر ہے۔ اس کا نچلا سرا دیوار سے 6 میٹر دور ہے۔ بتایئے سیڑھی کا اوپر والا سرا دیوار کی کتنی اونچائی تک پہنچا؟

4- قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle C = 90^\circ$، $m\overline{BC} = 2.1cm$ اور $m\overline{AC} = 7.2cm$۔ $\overline{AB}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

5- دی ہوئی شکل میں ثابت کریں کہ $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$



6- ایک کھمبے کا سایہ 2.8 میٹر لمبا ہے۔ سایہ کی نوک اور کھمبے کی نوک کا درمیانی فاصلہ 10.5 میٹر ہے۔ کھمبے کی اونچائی کی معلوم کریں۔

7- اگر مثلث ABC کے اضلاع a، b، c ہوں تو بتایئے کہ نیچے دی گئی اضلاع کی لمبائیوں میں سے کون کون سی مثلثان قائمۃ الزاویہ ہیں۔ $\angle A$، $\angle B$ اور $\angle C$ میں سے کوئی بھی زاویہ قائمہ ہو سکتا ہے۔

(i) $a = 6,\ b = 5,\ c = 7$ **(ii)** $a = 8,\ b = 9,\ c = \sqrt{145}$

(iii) $a = 12,\ b = 5,\ c = 13$

8- قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں وتر c ہے۔ اور دوسرے اضلاع a، b ہیں۔ نامعلوم لمبائی معلوم کیجیے

(i) $a = 60cm$, $c = 61cm$, $b = ?$

(ii) $a = \frac{5}{12}cm$, $c = \frac{13}{12}cm$, $b = ?$

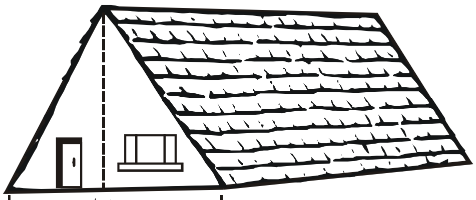
(iii) $a = 2.4m$, $c = 2.6m$, $b = ?$

(iv) $b = 10m$, $a = 4\sqrt{5}m$, $c = ?$

(v) $b = 5dm$, $a = 5\sqrt{7}dm$, $c = ?$

(vi) $c = 10\sqrt{2}dm$, $b = 5\sqrt{3}dm$, $a = ?$

-9 ایک مکان کا سامنا حصہ مساوی الاضلاع مثلث جیسا ہے اور اس کے ایک ضلع کی لمبائی 10 میٹر ہے مکان کی اونچائی معلوم کریں۔



9.2 ہیرو کا کلیہ (Hero's Formula)

پچھلی جماعتوں میں ہم مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔ اور بھی کئی ایک طریقے ہیں جن کی مدد سے ہم مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں اُن میں سے ایک ہیرو کا کلیہ ہے۔

یونان میں سکندریہ کا رہنے والا ایک ریاضی دان ہیرو تھا۔ اُس نے یہ کلیہ دریافت کیا اور اُسی کے نام سے اس کلیہ کا نام رکھا گیا ہے۔ یہ کلیہ اس وقت لاگو ہوتا ہے جب مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہوں۔

9.2.1 ہیرو کا کلیہ

اگر مثلث ABC کے اضلاع کی لمبائیوں کو a، b اور c سے ظاہر کیا جائے تو مثلث ABC کے رقبہ کو $\blacktriangle ABC$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اور $\blacktriangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ جبکہ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

- **مثلثی اور چوکوری علاقہ جات کا رقبہ معلوم کرنا**

مثال 1: ایک مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کریں جبکہ اُس کے اضلاع کی لمبائیاں $14cm$، $21cm$ اور $25cm$ ہیں۔

حل: فرض کریں:

$$a = 14cm \text{ ،} \quad b = 21cm \quad \text{اور} \quad c = 25cm$$

کلیہ: $\blacktriangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

جبکہ: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

اب $s = \dfrac{14+21+25}{2}$

$$= \frac{60}{2} = 30$$

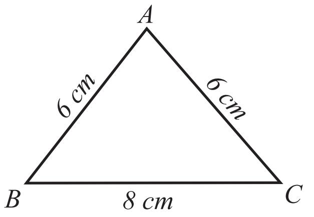
$$\blacktriangle ABC = \sqrt{30(30-14)(30-21)(30-25)}$$

$$\blacktriangle ABC = \sqrt{30 \times 16 \times 9 \times 5} \qquad = \sqrt{5 \times 6 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 5}$$

$$= \sqrt{3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6} \quad \text{اور} \quad = 3 \times 4 \times 5\sqrt{6}$$

$$\blacktriangle ABC = 60\sqrt{6}\ cm^2$$

مثال2: ایک مساوی الساقین مثلثی علاقہ ABC کا رقبہ معلوم کریں۔
جبکہ $m\overline{AB} = m\overline{AC} = 6cm$ اور $m\overline{BC} = 8cm$



حل: $\blacktriangle ABC$ کے اضلاع a، b، c لیتے ہیں
یعنی $a = 8cm$ ، $b = 6cm$ اور $c = 6cm$

کلیہ: $\blacktriangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

جبکہ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

اب $s = \dfrac{8+6+6}{2} = \dfrac{20}{2} = 10cm$

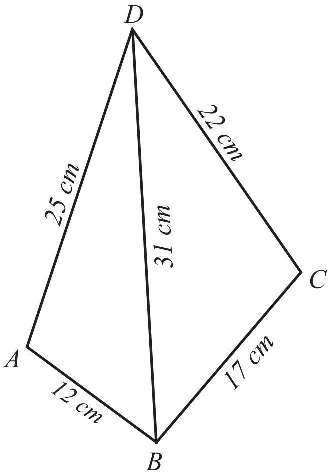
$$\begin{aligned}\blacktriangle ABC &= \sqrt{10(10-8)(10-6)(10-6)} \\ &= \sqrt{10 \times 2 \times 4 \times 4} \\ &= \sqrt{5 \times 2 \times 2 \times 4 \times 4} \\ &= 2 \times 4\sqrt{5} \\ &= 8\sqrt{5}\ cm^2\end{aligned}$$

- **ہیرو کے کلیہ کی مدد سے چوکوروی علاقہ جات کا رقبہ معلوم کرنا**

چوکور کا وتر اُسے دو مثلثوں میں تقسیم کر دیتا ہے۔ ہیرو کے کلیہ کی مدد سے دونوں مثلثی علاقوں کا رقبہ معلوم کر کے جمع کر لیا جاتا ہے۔ اس طرح چوکوروی علاقہ کا رقبہ معلوم ہو جاتا ہے۔

مثال3: چوکوروی علاقہ $ABCD$ کا رقبہ معلوم کریں۔
جبکہ $m\overline{AB} = 12cm$ ، $m\overline{BC} = 17cm$ ، $m\overline{CD} = 22cm$ ، $m\overline{DA} = 25cm$ اور $m\overline{BD} = 31cm$

حل: چوکوروی علاقہ $ABCD$ کا رقبہ $= \blacktriangle ABD + \blacktriangle BCD$



پہلے مثلثی علاقہ ABD کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

یہاں
$$\begin{aligned}s &= \frac{12+31+25}{2} \\ &= \frac{68}{2} = 34cm\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\blacktriangle ABD &= \sqrt{34(34-12)(34-31)(34-25)} \\ &= \sqrt{34 \times 22 \times 3 \times 9} \\ &= \sqrt{17 \times 2 \times 11 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} \\ &= 2 \times 3\sqrt{17 \times 33} \\ &= 6 \times 23.69 \\ &= 142.14\ cm^2\ (\text{تقریباً})\end{aligned}$$

$\blacktriangle BCD$ کے لیے:

$$s = \frac{17+22+31}{2}$$
$$= \frac{70}{2} = 35\ cm$$
$$\blacktriangle BCD = \sqrt{35(35-17)(35-22)(35-31)}$$
$$= \sqrt{35 \times 18 \times 13 \times 4} = \sqrt{35 \times 9 \times 2 \times 13 \times 4}$$
$$= 6\sqrt{26 \times 35} = 6 \times 30.16$$
$$= 180.96 cm^2$$

چوکوروی علاقہ $ABCD$ کا رقبہ $= \blacktriangle ABD + \blacktriangle BCD$

$$= 142.14 + 180.96$$
$$= 323.10\ cm^2 \text{ (تقریباً)}$$

مشق 9.2

-1 ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں $60m$، $153m$ اور $111m$ ہے۔ مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کریں۔

-2 مثلثی علاقہ جات کے رقبے معلوم کریں جبکہ اضلاع کی لمبائیاں دی ہوئی ہیں۔

(i) $13cm, 14cm, 15cm$ **(ii)** $5cm, 12cm, 13cm$

(iii) $103cm, 115cm, 13cm$

-3 ہیرو کے کلیہ کی مدد سے نامعلوم پیمائش معلوم کریں۔

(i)	$a = 5m$	$b = 7m$	$s = 9m$	$c =$ ------	$\blacktriangle ABC =$ ------
(ii)	$a = 10m$	$b = 8m$	$s = 12m$	$c =$ ------	$\blacktriangle ABC =$ ------
(iii)	$a = 3m$	$s = 9.5m$	$c = 9m$	$b =$ ------	$\blacktriangle ABC =$ ------
(iv)	$a = 3.5m$	$b = 2.5m$	$c = 4.5m$	$s =$ ------	$\blacktriangle ABC =$ ------

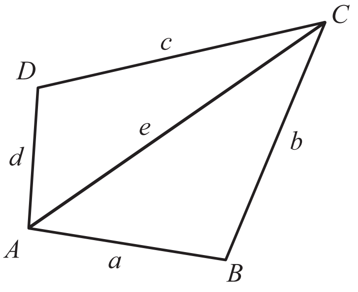
-4 $ABCD$ چوکوروی علاقہ جات کا رقبہ معلوم کریں جبکہ تمام پیمائشیں سینٹی میٹر (cm) میں ہیں۔

(i) $a = 19$, $b = 12$, $c = 15$, $d = 20$ اور $e = 23$

(ii) $a = 12$, $b = 14$, $c = 17$, $d = 19$ اور $e = 21$

(iii) $a = 2$, $b = 2.5$, $c = 3$, $d = 1.5$ اور $e = 3.5$

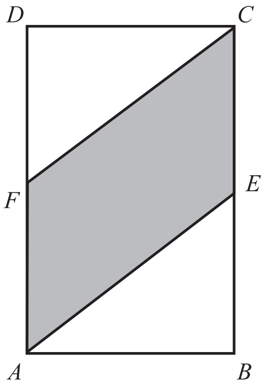
(iv) $a = 1.7$, $b = 1$, $c = 1.3$, $d = 1.8$ اور $e = 2.1$



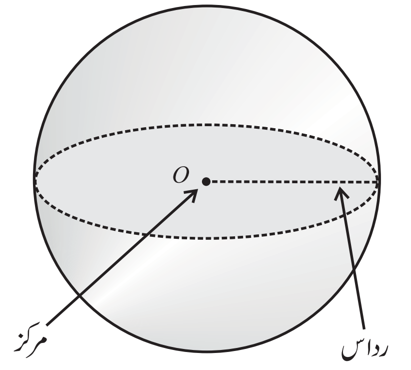
-5 دی ہوئی شکل ایک مستطیل $ABCD$ کی ہے جس کے اضلاع 8 سم اور 12 سم ہیں۔ نقطہ E ضلع $\overline{BC}$ کا وسطی نقطہ ہے اور نقطہ F ضلع $\overline{AD}$ کا وسطی نقطہ ہے ہیرو کے کلیہ اور مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے رقبہ معلوم کریں۔

(i) مثلثی علاقہ ABE اور FDC کا

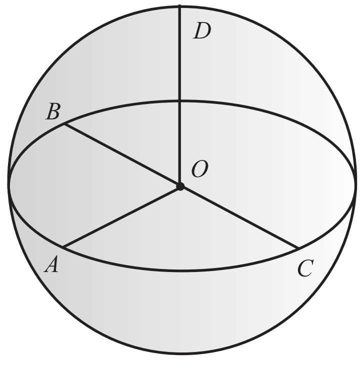
(ii) متوازی الاضلاع $AECF$ کا



9.3 کرّہ کی سطح کا رقبہ اور حجم (Surface Area and Volume of Sphere)



کرّہ ایک ٹھوس مجسم ہے جسے ایک کروی سطح نے گھیرا ہوتا ہے۔ اور اس کی بیرونی سطح پر کا ہر ایک نقطہ ایک مقررہ نقطہ سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہیں یہ مقرّرہ نقطہ کرّہ کے اندر رہوتا ہے اور اسے کرّہ کا مرکز (center) کہتے ہیں۔ کرّہ کے مرکز سے اُس کی بیرونی سطح کا فاصلہ کرّہ کا رداس کہلاتا (radius) ہے۔



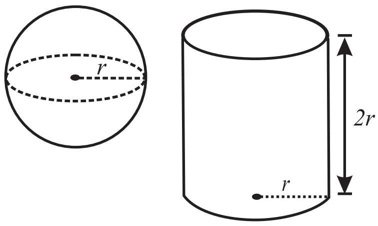
قطعات خط $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ، $\overline{OC}$ اور $\overline{OD}$ کی لمبائی کی پیمائشیں برابر ہیں اور آپس میں یکساں ہیں۔

کرّہ کی ایک مثال کرکٹ گیند ہے۔

9.3.1 کرّہ کی سطح کا رقبہ اور کرُّہ کا حجم (جسامت) معلوم کرنا

- کرُّہ کی سطح کا رقبہ

کرُّہ کی سطح کا رقبہ مشہور و معروف ریاضی دان ارشمیدش نے دریافت کیا کہ اس کی سطح کا رقبہ اُس بیلن کی کروی سطح کے برابر ہے جس کا رداس کرہ کے رداس کے برابر ہے اور بلندی اس رداس سے دوگنی ہو۔



r = فرض کریں کرّہ کا رداس

r = بیلن کا رداس

$h = 2r$ = بیلن کی بلندی

$2\pi rh$ = بیلن کی کروی سطح کا رقبہ

$2\pi r(2r)$ = کرّہ کی سطح کا رقبہ

$= 4\pi r^2$

مثال1: ایک کرّہ کا رداس $21cm$ ہے۔ اُس کی سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: کرّہ کی سطح کا رقبہ $= 4\pi r^2$

یہاں $r = 21cm, \quad \pi = \frac{22}{7}$

کرّہ کی سطح کا رقبہ $= 4 \times \frac{22}{7} \times (21)^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

کرّہ کی سطح کا رقبہ $= 5544cm^2$

مثال2: کرّہ کا رداس معلوم کریں جبکہ اُس کی سطح کا رقبہ $6.16m^2$ ہے۔

حل: A = فرض کریں کُرّوی سطح کا رقبہ

تو $A = 4\pi r^2$

یہاں $A = 6.16\ m^2$ اور $\pi = \frac{22}{7}$

یوں $4\pi r^2 = 6.16m^2$

یا $r^2 = \frac{6.16}{4\pi}$

$r^2 = \frac{6.16 \times 7}{4 \times 22}$

$r^2 = 0.49m^2$

$r = \sqrt{0.49}$

یا $r = 0.7m$

کُرّہ کا حجم (جسامت) (Volume of a Sphere)

کُرّہ کا حجم $= V = \frac{2}{3}$ (بیلن کا حجم)

جب رداس r اور اونچائی $2r$ ہو

$$V = \frac{2}{3} \times \pi r^2 \times 2r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

کُرّہ کا حجم جبکہ رداس r ہے $= V = \frac{4}{3}\pi r^3$

مثال3: ایک کروی ٹینک میں کتنے لٹر پانی آسکتا ہے جبکہ اُس کا رداس 1.4 میٹر ہے۔

حل: یہاں $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$V = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (1.4)^3 \quad (\text{جبکہ } r = 1.4m)$$

$$V = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 1.4 \times 1.4 \times 1.4$$

$$= 11.499m^3$$

$$= 11.499 \times 1000 \quad \mathbf{(1m^3 = 1000\ L)}$$

$$= 11499\ L\ (\text{لٹر})$$

مثال4: کُرّہ کا حجم معلوم کریں جبکہ اُس کی سطح کا رقبہ 2464 مربع سم ہے۔

حل: کُرّہ کی سطح کا رقبہ $= A = 4\pi r^2$

یوں $4\pi r^2 = 2464 cm^2$

یا $r^2 = \frac{2464}{4\pi}$

$$= \frac{2464 \times 7}{4 \times 22}$$

$$r^2 = 196$$

یا $r = 14cm$

کُرّہ کا حجم $= V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\pi \times (14)^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (14)^3$$

$$= \frac{34496}{3}$$

$$= 11498.66\ cm^3\ (\text{تقریباً})$$

مشق 9.3

-1 کُرّوں کی سطح کے رقبے معلوم کریں جبکہ اُن کے رداس دیے ہوئے ہیں۔($\pi = \frac{22}{7}$)۔

(i) $r = 3.5cm$ **(ii)** $r = 2.8m$ **(iii)** $0.21m$

-2 رداس معلوم کریں جبکہ کُرّوں کی سطح کا رقبہ دیا ہوا ہے۔

(i) $154m^2$ **(ii)** $231m^2$ **(iii)** $308m^2$

-3 کُرّہ کا حجم معلوم کریں جبکہ رداس r کی قیمت دی ہوئی ہے۔

(i) $5.8cm$ **(ii)** $8.7cm$ **(iii)** $7cm$ **(iv)** $3.4\ m$

-4 کُرّوں کی سطحوں کا رقبہ دیا ہوا ہے۔ رداس اور حجم معلوم کریں۔

(i) $201\frac{1}{7}\,cm^2$ **(ii)** $2.464cm^2$ **(iii)** $616m^2$

-5 ایک کروی ٹینک کا رداس $7.7m$ ہے۔ اس میں کتنے لِٹر پانی آ سکتا ہے؟ جبکہ لِٹر $1 = 1000cm^3$

-6 اگر کُرہ A کا رداس کُرہ B کے رداس سے دوگنا ہو تو معلوم کریں:

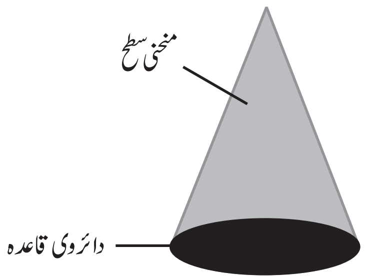
(i) سطحوں کے رقبوں میں نسبت

(ii) حجموں میں نسبت

-7 ایک کُرّہ کی سطح کا رقبہ 576π مربع سم ہے۔ اس کا حجم بتائیے۔ اسے پگھلا کر 1 سم قطر کے کتنے کُرّے بنائے جا سکتے ہیں۔

-8 ایک ٹھوس کاپر کے کُرّہ کو جس کا رداس 3 سم ہے کو پگھلا کر ایک تار بنائی گئی ہے جس کا قطر 0.4 سم ہے۔ تار کی لمبائی معلوم کریں۔

9.3.2 مخروط کی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کرنا

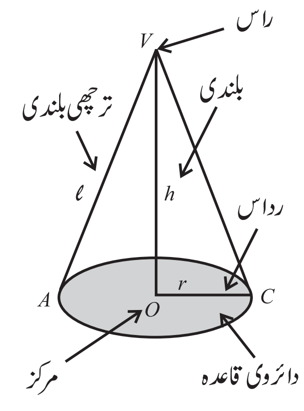


سامنے دی ہوئی شکل ایک مخروط مجسم ہے۔ اِس مخروطی ٹھوس کے دو حصے ہیں۔

(i) دائروی قاعدہ

(ii) منحنی سطح

مخروطی مجسم کے 5 اجزاء ہوتے ہیں جیسا کہ بائیں طرف دی ہوئی شکل میں دکھایا گیا ہے۔



(i) راس (نقطہ V)

(ii) رداس (r) یعنی $(m\overline{OC})$

(iii) ترچھی بلندی (ℓ) یعنی $(m\overline{CV})$ یا $(m\overline{AV})$

(iv) بلندی (h) یعنی $(m\overline{OV})$

(v) مرکز (نقطہ O)

قطعہ خط جو نقطہ V کو نقطہ O سے ملاتا ہے رداسی قطعہ پر عمود ہوتا ہے۔

• مخروط کی سطح کا رقبہ (Surface Area of a Cone)

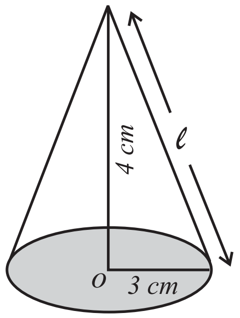
ہم جانتے ہیں کہ دائرہ کی سطح کا رقبہ πr^2 ہے۔مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ $\pi r \ell$ ہے۔

یوں مخروط کی کل سطح کا رقبہ = قاعدہ کا رقبہ + منحنی سطح کا رقبہ

$$= \pi r^2 + \pi r \ell$$

$$= \pi r(r + \ell)$$

مثال5: ایک مخروط کے قاعدہ کا رداس 3 سم ہے اور بلندی 4 سم ہے۔ترچھی بلندی معلوم کریں۔



حل: ℓ = مخروط کی ترچھی بلندی

h = مخروط کی بلندی

r = دائرہ کا رداس

اب $\ell = \sqrt{h^2 + r^2}$

$\ell = \sqrt{3^2 + 4^2}$ $(h = 4cm ، r = 3cm)$

$= \sqrt{9+16}$

$= \sqrt{25}$

$\ell = 5cm$

مثال6: مخروط کے قاعدہ کا رداس 6 سم ہے اور ترچھی بلندی 10 سم ہے۔مخروط کی کل سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: یہاں $r = 6cm$ ، $\ell = 10cm$

مخروط کی کُل سطح کا رقبہ $= \pi r (r + \ell)$

$$= \frac{22}{7}(6)(6+10)$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 \times 16 = \frac{22}{7} \times 96cm^2$$

$$= \frac{2112}{7} cm^2 = 301\frac{5}{7} cm^2$$

کل رقبہ $= 301\frac{5}{7} cm^2$

مثال7: مخروط کے قاعدہ کا رقبہ $254\frac{4}{7}$ مربع سم ہے۔اس کی ترچھی بلندی 15 سم ہے۔بلندی معلوم کریں۔

حل: یہاں قاعدہ کا رقبہ $= \pi r^2 = 254\frac{4}{7}$

$$\frac{22}{7}r^2 = \frac{1782}{7} = \frac{1782}{7} \times \frac{7}{22}$$

$$r^2 = 81cm^2$$

$r = 9cm$

ترچھی بلندی $= \ell = 15cm$

بلندی $= h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{(15)^2 - (9)^2}$

$= \sqrt{225-81} = \sqrt{144} = 12cm$

- **مخروط کا حجم معلوم کرنا (Finding Volume of a Cone)**

مخروط کا حجم معلوم کرنے کے لیے ایک سرگرمی کرتے ہیں۔

سامان:

(i) ایک طرف کھلے منہ کا کھوکھلا بیلن (سلنڈر) جس کی بلندی h اور قاعدہ کا رداس r ہو۔

(ii) ایک کھوکھلا مخروط جس کی بلندی h اور قاعدہ کا رداس r ہو۔ (iii) ریت

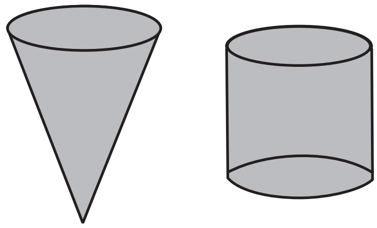
سرگرمی:

پہلا قدم: مخروط کو ریت سے بھریے اور بیلن میں ڈال دیجیے۔

دوسرا قدم: مخروط کو دوبارہ ریت سے بھریے اور بیلن میں ڈال دیجیے۔

تیسرا قدم: مخروط کو ایک دفعہ پھر ریت سے بھریے اور بیلن میں ڈال دیجیے۔

نتیجہ: تین دفعہ ریت ڈالنے سے بیلن مکمل طور پر بھر گئی۔



یعنی بیلن کا حجم = (مخروط کا حجم) × 3

(مخروط کا حجم) × 3 $= \pi r^2 h$

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}(\pi r^2)(h)$

یعنی $= \frac{1}{3}$ (قاعدہ کا رقبہ) × (مخروط کی بلندی)

مثال 8: ایک مخروطی برتن جس کی بلندی 3.5 میٹر اور رداس 3 میٹر ہے میں کتنی ریت آسکتی ہے جبکہ ایک مکعب میٹر ریت کا وزن 100 کلوگرام ہے

حل: بلندی $(h) = 3.5$ میٹر ، رداس $(r) = 3$ میٹر

کلیہ: مخروطی برتن کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3^2 \times 3.5$

$= 22 \times 3 \times 0.5$

$= 33m^3$

ایک مکعب میٹر ریت کا وزن = 100 کلوگرام

33 مکعب میٹر ریت کا وزن = $33 \times 100 = 3300$ کلوگرام

مثال9: ایک مخروطی ٹینٹ کی بلندی 5 میٹر اور قاعدہ کا رداس 12 میٹر ہے۔
(i) اس ٹینٹ کی تیاری میں کتنا کینوس استعمال ہوا۔ (ii) اس کے اندر ہوا کا حجم معلوم کریں۔

حل: (i) کلیہ: مخروط کی ترچھی سطح کا رقبہ $= \pi r \ell$

اب
$$\ell = \sqrt{r^2 + h^2}$$
$$= \sqrt{(12)^2 + (5)^2}$$
$$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13 \text{ میٹر}$$

اب ترچھی سطح کا رقبہ $= \pi r \ell = 3.14 \times 12 \times 13$

مطلوبہ کینوس کا رقبہ $= 489.84m^2$

(ii)...... مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$$= \frac{1}{3}\pi \times (12)^2 \times 5$$
$$= \frac{1}{3}(3.14)(12)(12)(5)$$
$$= 3.14 \times 4 \times 12 \times 5$$
$$= 3.14 \times 240$$

ٹینٹ کے اندر ہوا کا حجم $= 753.60m^3$

مثال10: ایک دھاتی مخروط کا رداس 2.4 سم اور بلندی 9.6 سم ہے۔ اسے پگھلا کر ایک کُرّہ میں تبدیل کیا گیا ہے۔ اس کُرہ کا رداس معلوم کریں۔

حل: فرض کریں $V_1 =$ مخروط کا حجم

اور $V_2 =$ کُرّہ کا حجم

اب
$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

یہاں $r = 2.4cm$

اور $h = 9.6cm$

اب فرض کریں: $R =$ کُرّہ کا رداس

تب
$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

اور
$$V_2 = V_1$$
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$4R^3 = r^2 h$$
$$R^3 = \frac{r^2 h}{4} = \frac{(2.4)^2 \times 9.6}{4}$$
$$R^3 = (2.4)^3$$

اس لیے $R = 2.4cm$

مشق 9.4

-1 مخروط کے نامعلوم اجزاء درج کریں جبکہ تمام لمبائیاں سینٹی میٹر میں دی ہوئی ہیں۔

نمبر شمار	r	h	ℓ	ترچھی سطح کا رقبہ	قاعدہ کا رقبہ	کل سطح کا رقبہ
(i)	–	8	10	–	–	–
(ii)	3	4	–	–	–	–
(iii)	9	–	25	–	–	–
(iv)	–	–	–	–	$154\ cm^2$	$374\ cm^2$

-2 مخروط کا حجم معلوم کریں اگر:

(i) $r = 3cm\ , h = 4cm$ **(ii)** $r = 7cm\ , h = 10cm$

(iii) $r = 5cm\ , \ell = 7cm$ **(iv)** $h = 5cm\ , \ell = 8cm$

-3 ایک مخروط شکل کا کپ آئس کریم سے بھرا ہوا ہے۔اس میں آئس کریم کا حجم کتنا ہوگا؟ اگر اس کی بلندی 5 سم اور رداس 4 سم ہو۔

-4 ایک ٹھوس مخروط کی سطح کا کل رقبہ کتنا ہوگا؟ اگر اس کی بلندی 4 سم اور رداس 3 سم ہو۔

-5 ایک مخروط کے قاعدہ کا رقبہ 38.50 مربع سم ہے۔اگر اس کی بلندی قاعدہ کے رداس سے تین گنا ہو تو اس کا حجم معلوم کریں۔

-6 ایک مخروطی شکل کے ٹینٹ کی بلندی 8.4 میٹر ہے تو اِس کے قاعدہ کا رداس 54 ڈیسی میٹر ہے۔اس ٹینٹ میں کتنے سکاؤٹوں کو رکھا جا سکتا ہے؟ جبکہ ہر ایک سکاؤٹ کو 5.832 مکعب میٹر ہوا کی ضرورت ہو۔

جائزہ مشق 9

-1 ہر سوال کے نیچے چار ممکنہ جوابات دیے ہوئے ہیں۔اُن میں سے درست جواب کے گرد دائرہ لگائیں۔

(i) قائمۃ الزاویہ مثلث ABC کا $\angle C$ قائمہ ہے۔اس صورت میں c کو کیا کہا جائے گا؟

(a) قاعدہ **(b)** وتر **(c)** عمود **(d)** راس

(ii) قائمۃ الزاویہ مثلث ABC کا $\angle C$ قائمہ ہے۔اور $\angle A$ قاعدہ پر کا ایک زاویہ ہے۔اس صورت میں b کو کیا کہا جائے گا؟

(a) قاعدہ **(b)** وتر **(c)** عمود **(d)** راس

(iii) ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں $m\angle C = 90°$ اور $\angle A$ قاعدہ پر کا ایک زاویہ ہے۔اس صورت میں a کو کیا کہا جائے گا؟

(a) قاعدہ **(b)** وتر **(c)** عمود **(d)** راس

(iv) قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ کے متقابلہ ضلع کو کیا کہتے ہیں؟

(a) عمود (b) قاعدہ (c) وتر (d) قائمہ زاویہ

(v) قائمۃ الزاویہ مثلث کا قاعدہ 3 سم اور عمود 6 سم ہے اُس کا رقبہ کتنا ہوگا؟

(a) 9 مربع سم (b) 16 مربع سم (c) 25 مربع سم (d) 64 مربع سم

(vi) مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہیرو کا کلیہ کیا ہے؟

(a) $\sqrt{s(s-a)(s-b)}$ (b) $\sqrt{s(s-a)(s-c)}$

(c) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (d) $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$

-2 درج ذیل کے مختصر جوابات لکھیں۔

(i) مسئلہ فیثا غورث کو بیان کیجیے۔

(ii) ہیرو کا کلیہ لکھیے۔

(iii) کرّہ کی سطح کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ لکھیے۔

(iv) مخروط کا حجم معلوم کرنے کا کلیہ لکھیے۔

-3 (i) ایک کرّہ کا حجم معلوم کریں جبکہ اُس کا رداس 3.2 سم ہو۔

(ii) مخروط کا حجم معلوم کریں جبکہ رداس 3 سم اور بلندی 4 سم ہو۔

(iii) ایک مثلثی علاقہ کا رقبہ معلوم کریں جبکہ اُس کے اضلاع 4 سم، 5 سم اور 8 سم ہوں۔

خلاصہ

- قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔
- مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کا ہیرو کلیہ $\blacktriangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ہے جبکہ a، b اور c اس کے اضلاع ہیں اور $s = \dfrac{a+b+c}{2}$
- اگر کرّہ کا رداس r ہو تو اُس کی سطح کا رقبہ $4\pi r^2$ ہے۔
- اگر کرّہ کا رداس r ہو تو اُس کا حجم $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ ہے۔
- مخروط کا حجم $= \dfrac{1}{3}$ (قاعدہ کا رقبہ) (عمودی بلندی)

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$